



Trigonometria

Doherty Andrade

Trigonometria– introdução¹

Copyright © 2000. 2002, 2004, 2025. Doherty Andrade. The document, may be used, copied and distributed freely, entire and intact, for any purpose, but may not be distributed in an altered form. If you want to improve on anything, which certainly can be done, then please write your own version, change title and author.

¹doherty200@hotmail.com

Resumo

Nessas notas apresentamos uma introdução elementar às funções trigonométricas. Este é um arquivo recuperado e revisto, mas ainda bem útil. As figuras foram refeitas e alguns enganos corrigidos.

Sumário

1	Introdução: definições e fatos básicos	5
2	Números trigonométricos de um número real t	5
3	Fórmulas Básicas	7
4	Valores relacionados	7
4.1	Valores suplementares	7
4.2	Valores complementares	8
4.3	Valores opostos	8
4.4	Valores anti-suplementares	8
5	O triângulo retângulo	9
6	Área de um triângulo	10
7	Regra do Seno	11
8	Expressões homogêneas em a, b e c	12
9	Regra do cosseno	12
10	Funções trigonométricas	12
10.1	A função seno	12
10.2	A função cosseno	13
10.3	A função tangente	13
11	A função cotangente	14
12	Funções trigonométricas inversas	15
12.1	A função arco seno: $\arcsin$	15
12.2	A função arco cosseno: $\arccos$	16

12.3 A função arco tangente: $\arctan$	18
12.4 A função arco cotangente: accot	19
13 Fórmulas de soma	19
13.1 $\cos(u + v)$	19
13.2 $\cos(u - v)$	20
13.3 $\sin(u - v)$	21
13.4 $\sin(u + v)$	21
13.5 $\tan(u + v)$	21
13.6 $\tan(u - v)$	21
13.7 $\sin(2u)$	22
13.8 $\cos(2u)$	22
13.9 $\tan(2u)$	22
14 Fórmulas de Carnot	22
15 t-fórmulas	23
16 Equações trigonométricas	23
16.1 Equações básicas $\cos(u) = \cos(v)$	23
16.2 $\sin(u) = \sin(v)$	24
16.3 $\tan(u) = \tan(v)$	24
16.4 $\cot(u) = \cot(v)$	24
17 Reduzindo a equações básicas	24
17.1 Exemplo 1	24
17.2 Exemplo 2	24
17.3 Usando uma variável adicional	25
17.4 Exemplo 3	25
18 Usando fatoração	26
18.1 Exemplo 1	26
18.2 Exemplo 2	26
18.3 Exemplo 3	27

1 Introdução: definições e fatos básicos

Círculo trigonométrico e ângulos: tomemos um sistema de eixos ortogonais XOY , onde O é a origem. Um círculo de centro O e raio $r = 1$ é chamado um círculo trigonométrico ou um círculo unitário.

Percorrer o círculo no sentido anti-horário é a orientação positiva na trigonometria.

Ângulos são medidos iniciando no eixo dos x . As duas unidades de medidas de ângulos mais usadas são o grau (em inglês degree) e o radiano.

Um ângulo reto mede 90 graus que equivale a $\frac{\pi}{2}$ radianos. Aqui usaremos mais frequentemente a medida de ângulos em radianos.

A cada número real t corresponde exatamente um ângulo, e exatamente um ponto sobre o círculo, quando iniciamos a medida a partir do eixo dos x . Chamamos este ponto de a imagem de t . Veja a figura 1.

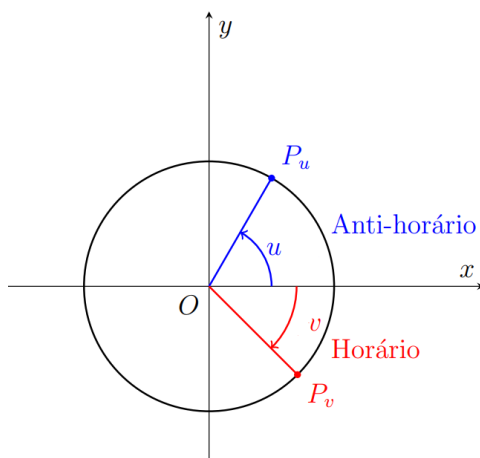


Figura 1: Círculo trigonométrico com ângulos orientados.

Exemplos:

- (a) a $\frac{\pi}{3}$ corresponde o ângulo u e o ponto P_u sobre o círculo.
- (b) a $\frac{-\pi}{3}$ corresponde o ângulo v e o ponto P_v sobre o círculo.

2 Números trigonométricos de um número real t

A t radianos corresponde exatamente um ponto P sobre o círculo unitário

- À coordenada x de P é chamada de cosseno de t . Escrevemos $\cos(t)$.

- À coordenada y de P é chamada de seno de t . Escrevemos $\sin(t)$.
- Ao número $\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ chamamos a tangente de t . Escrevemos $\tan(t)$.
- Ao número $\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ chamamos a cotangente de t . Escrevemos $\cot(t)$.
- Ao número $\frac{1}{\cos(t)}$ chamamos a secante de t . Escrevemos $\sec(t)$.
- Ao número $\frac{1}{\sin(t)}$ chamamos a cossecante de t . Escrevemos $\csc(t)$.

A reta dada pela equação $\sin(t) \cdot x - \cos(t) \cdot y = 0$ passa pela origem O e pelo ponto $P = (\cos(t), \sin(t))$. Então a reta é a reta OP . Nesta reta tomamos o ponto de interseção $S = (1, a)$ com a reta vertical $x = 1$. É fácil resolver o sistema e obter que $a = \tan(t)$. Assim, $\tan(t)$ é a y -coordenada do ponto S . Veja a figura 2.

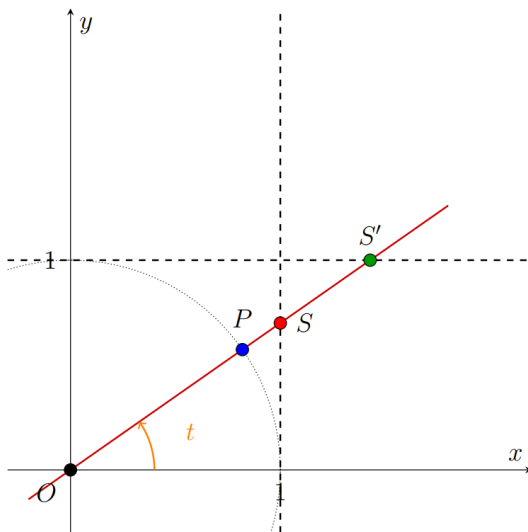


Figura 2: Interpretação geométrica da tangente e cotangente. A reta OP intersecta a reta vertical $x = 1$ no ponto S com coordenada $y = \tan t$, e a reta horizontal $y = 1$ no ponto S' com coordenada $x = \cot t$.

Analogamente, a interseção da reta horizontal $y = 1$ com a reta OP é o ponto $S' = (b, 1)$. Resolvendo, vemos que b é a x -coordenada do ponto. Assim, $\cot(t)$ é a x -coordenada do ponto S' .

3 Fórmulas Básicas

A t radianos corresponde exatamente um ponto $P = (\cos(t), \sin(t))$ sobre o círculo unitário. O quadrado da distância $[OP]$ é igual a 1. Calculando esta distância, usando as coordenadas de P , temos para cada t a seguinte igualdade

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$

Dividindo a igualdade acima por $\cos^2(t)$, obtemos

$$1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)} = \sec^2(t).$$

Analogamente,

$$1 + \cot^2(t) = \frac{1}{\sin^2(t)} = \csc^2(t).$$

Resumindo, já obtivemos as seguintes relações:

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \tag{1}$$

$$1 + \tan^2(t) = \sec^2(t) \tag{2}$$

$$1 + \cot^2(t) = \csc^2(t). \tag{3}$$

4 Valores relacionados

4.1 Valores suplementares

Dizemos que t e t' são valores suplementares se, e somente se, $t + t' = \pi$.

Com ajuda do círculo unitário vemos que os pontos imagens correspondentes são simétricos com relação ao eixo dos Y . Portanto, temos:

Se t e t' são valores suplementares, então:

$$\sin(t) = \sin(t') \tag{4}$$

$$\cos(t) = -\cos(t') \tag{5}$$

$$\tan(t) = -\tan(t') \tag{6}$$

$$\cot(t) = -\cot(t'). \tag{7}$$

4.2 Valores complementares

Dizemos que t e t' são complementares se, e somente se, $t + t' = \frac{\pi}{2}$.

Os pontos imagens correspondentes sobre o círculo unitário são simétricos com relação a reta $y = x$.

Portanto, se t e t' são complementares, então:

$$\sin(t) = \cos(t') \quad (8)$$

$$\cos(t) = \sin(t') \quad (9)$$

$$\tan(t) = \cot(t') \quad (10)$$

$$\cot(t) = \tan(t'). \quad (11)$$

4.3 Valores opostos

Dizemos que t e t' são valores opostos se, e somente se, $t + t' = 0$.

Neste caso, os pontos imagens correspondentes são simétricos com relação ao eixo dos X .

Portanto, se t e t' são valores opostos, então:

$$\sin(t) = -\sin(t') \quad (12)$$

$$\cos(t) = \cos(t') \quad (13)$$

$$\tan(t) = -\tan(t') \quad (14)$$

$$\cot(t) = -\cot(t'). \quad (15)$$

4.4 Valores anti-suplementares

Dizemos que t e t' são anti-suplementares se, e somente se, $t - t' = \pi$.

Os pontos imagens correspondentes são simétricos com relação a origem O .

Portanto, se t e t' são anti-suplementares, então:

$$\sin(t) = -\sin(t') \quad (16)$$

$$\cos(t) = -\cos(t') \quad (17)$$

$$\tan(t) = \tan(t') \quad (18)$$

$$\cot(t) = \cot(t'). \quad (19)$$

5 O triângulo retângulo

Um triângulo é dito retângulo se ele tem um ângulo reto. É fácil ver que um triângulo só pode ter um ângulo reto.

Consideremos o triângulo ABC com ângulo reto em A . Tomemos o ponto B como centro do círculo trigonométrico. Veja a figura 3.

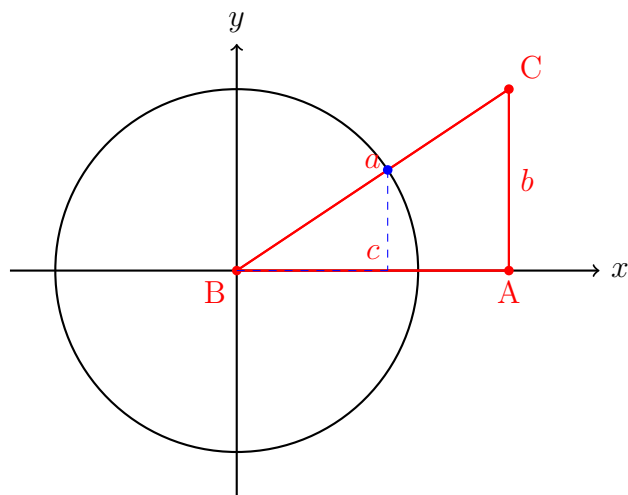


Figura 3: Triângulo retângulo.

Os lados AB e AC são chamados catetos e BC é chamado a hipotenusa. As distâncias $|CA|$ e $|AB|$ são usualmente denotadas por b e c , respectivamente. Por a denotamos a medida da hipotenusa BC .

No triângulo retângulo ABC com ângulo reto em A , definimos:

$$\sin(B) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \quad (20)$$

$$\cos(B) = \frac{c}{a} \quad (21)$$

$$\tan(B) = \frac{b}{c}, \quad (22)$$

o que implica que

$$\sin(B) = \frac{b}{a} \quad (23)$$

$$\cos(B) = \frac{c}{a} \quad (24)$$

$$\tan(B) = \frac{b}{c}. \quad (25)$$

Como os ângulos B e C são complementares, temos:

$$\cos(C) = \frac{b}{a} \quad (26)$$

$$\sin(C) = \frac{c}{a} \quad (27)$$

$$\tan(C) = \frac{c}{b}. \quad (28)$$

Em todo triângulo retângulo ABC , com ângulo reto em A , temos:

$$\sin(B) = \frac{b}{a}, \text{ cateto oposto sobre hipotenusa} \quad (29)$$

$$\cos(B) = \frac{c}{a}, \text{ cateto adjacente sobre hipotenusa} \quad (30)$$

$$\tan(B) = \frac{b}{c}, \text{ cateto oposto sobre cateto adjacente} \quad (31)$$

$$\cos(C) = \frac{b}{a}, \text{ cateto adjacente sobre hipotenusa} \quad (32)$$

$$\sin(C) = \frac{c}{a}, \text{ cateto oposto sobre hipotenusa} \quad (33)$$

$$\tan(C) = \frac{c}{b}, \text{ cateto oposto sobre cateto adjacente..} \quad (34)$$

6 Área de um triângulo

A área do triângulo é dada pelo semi produto das medidas da base pela sua altura, isto é,

$$A = \frac{ah}{2}.$$

Veja a figura 4.

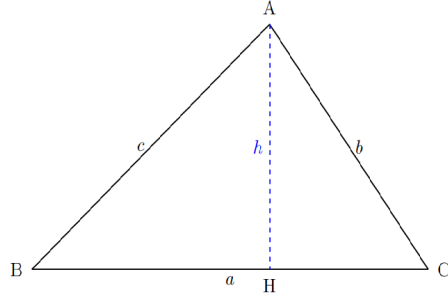


Figura 4: Área de um triângulo

No triângulo retângulo BAH , temos $\sin(B) = \frac{h}{c}$. E assim a sua altura é $h = c \cdot \sin(B)$. A altura do triângulo BAH e BAC é a mesma. Portanto, a área do triângulo BAC é $\frac{a \cdot c \cdot \sin(B)}{2}$.

Do mesmo modo, temos que área do triângulo também é dada por

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin(A)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(C)}{2}.$$

A área do triângulo ABC é dada por $\frac{a \cdot c \cdot \sin(B)}{2}$ ou por $\frac{b \cdot c \cdot \sin(A)}{2}$ ou por $\frac{a \cdot b \cdot \sin(C)}{2}$.

7 Regra do Seno

No triângulo ABC temos que a área é

$$\frac{a \cdot c \cdot \sin(B)}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin(A)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(C)}{2}.$$

Simplificando temos,

$$a \cdot c \cdot \sin(B) = b \cdot c \cdot \sin(A) = a \cdot b \cdot \sin(C),$$

dividindo por $a \cdot b \cdot c$, obtemos que em qualquer triângulo ABC temos:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}. \quad (35)$$

Esta fórmula é chamada de regra do seno (ou lei dos senos) no triângulo ABC . Seja R o raio do círculo de centro O que passa pelos pontos A, B e C . Seja B' o segundo ponto de interseção de BO e o círculo. O ângulo B' no triângulo $BB'C$ é igual a A . No triângulo retângulo $BB'C$ vemos que $a = 2R \sin(B') = 2R \sin(A)$. Assim, as frações na lei dos senos são iguais a $2R$.

8 Expressões homogêneas em a, b e c

Se uma expressão entre os lados de um triângulo é homogênea em a, b e c temos uma expressão equivalente substituindo a, b e c por $\sin(A), \sin(B), \sin(C)$.

Exemplo: Num triângulo

$$b \cdot \sin(A - C) = 3 \cdot c \cdot \cos(A + C)$$

é equivalente a

$$\sin(B) \cdot \sin(A - C) = 3 \cdot \sin(C) \cdot \cos(A + C).$$

9 Regra do cosseno

Em todo triângulo ABC temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(A) \quad (36)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca \cos(B) \quad (37)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C). \quad (38)$$

10 Funções trigonométricas

10.1 A função seno

A função definida por:

$$\begin{aligned} \sin &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

é chamada a função seno.

A imagem desta função é o intervalo fechado $[-1, 1]$ e o seu período é 2π . Veja o seu gráfico na figura 5, desenhado apenas no intervalo $[0, 2\pi]$.

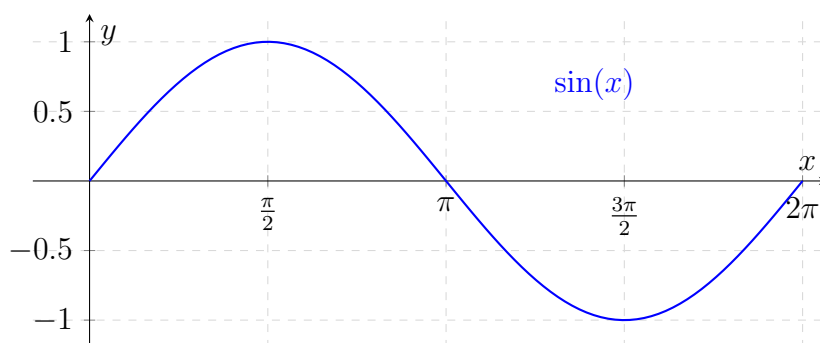


Figura 5: Gráfico da função seno no intervalo $[0, 2\pi]$.

10.2 A função cosseno

A função cosseno é definida por:

$$\begin{aligned}\cos &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x)\end{aligned}$$

A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$ e seu período 2π . Veja o seu gráfico na figura 6, desenhado apenas no intervalo $[0, 2\pi]$.

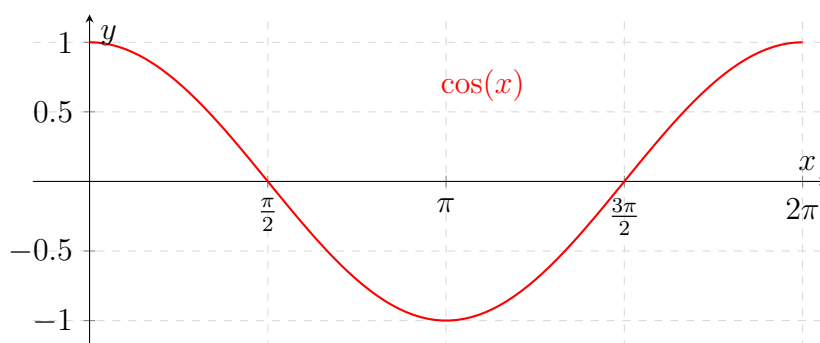


Figura 6: Gráfico da função cosseno no intervalo $[0, 2\pi]$.

10.3 A função tangente

A função tangente é definida por:

$$\begin{aligned}\tan &: \mathbb{R} - S \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x)\end{aligned}$$

onde $S = \{x; x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Agora, o seu período é π . Note que a função tangente não está definida em $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, onde k é um inteiro.

A sua imagem é $\mathbb{R}$. Veja o seu gráfico na figura 7, desenhado apenas no intervalo $[0, \pi]$.

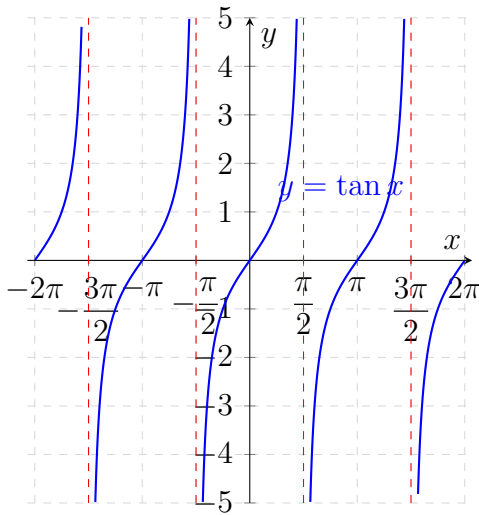


Figura 7: Gráfico da função tangente no intervalo $(-2\pi, 2\pi)$.

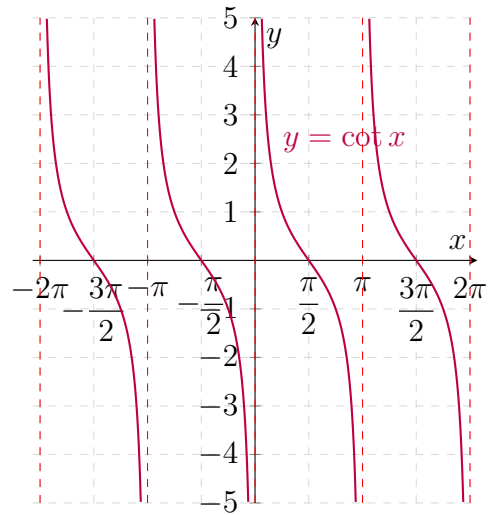


Figura 8: Gráfico da função cotangente no intervalo $(-2\pi, 2\pi)$.

11 A função cotangente

É a função definida por:

$$\begin{aligned} \cot : \mathbb{R} - S &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cot(x) \end{aligned}$$

onde $S = \{x; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

O seu período é π . Note que $\cot(x)$ não está definida em $x = k\pi$, onde k é um inteiro.

A imagem da função $\cot$ é $\mathbb{R}$. Veja o seu gráfico na figura 8, desenhado apenas no intervalo $[0, \pi]$.

12 Funções trigonométricas inversas

12.1 A função arco seno: $\arcsin$

Restringimos o domínio da função seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Agora esta restrição é uma função invertível, pois cada valor x na imagem $[-1, 1]$ tem exatamente um ponto t em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\sin(t) = x$.

A função inversa desta restrição é chamada de função arco seno. Escrevemos $\arcsin(x)$.

O gráfico de $y = \arcsin(x)$ é a reflexão em torno da reta $y = x$ do gráfico da função seno restrita ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

O seu domínio é $[-1, 1]$ e a sua imagem é $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Veja o seu gráfico na figura 10, desenhado apenas nos intervalos apropriados.

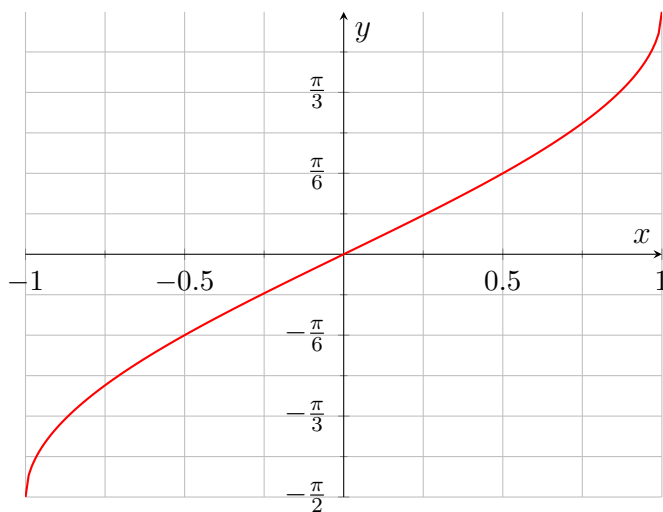


Figura 9: $\arcsin(x)$

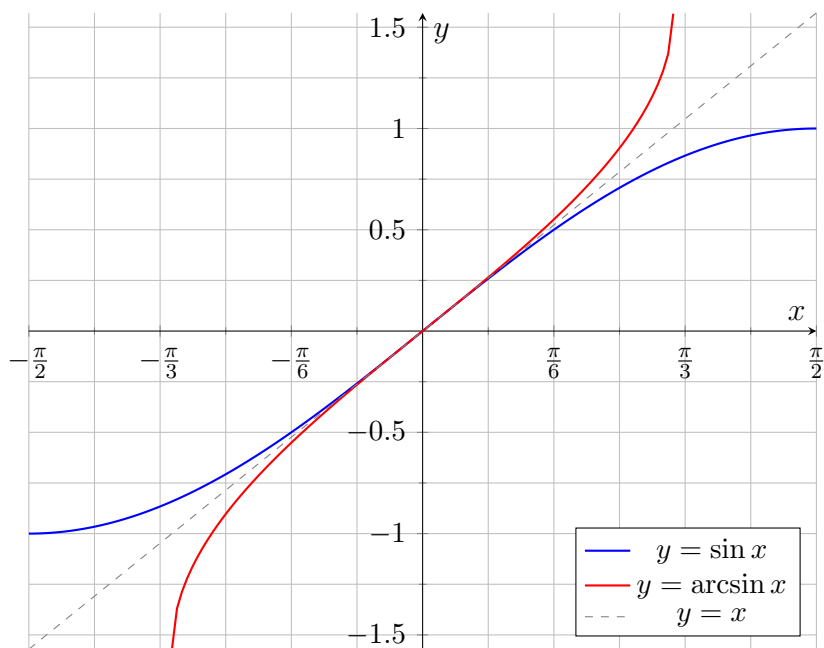


Figura 10: Função seno e sua inversa.

12.2 A função arco cosseno: arccos

Restringimos o domínio da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$. Esta restrição é invertível, pois para cada valor x da imagem $[-1, 1]$ existe exatamente um t no intervalo $[0, \pi]$ tal que $\cos(t) = x$.

A função inversa da restrição da função cosseno é chamada de função arccosseno. Escrevemos arccos.

O gráfico de $y = \arccos(x)$ é a reflexão do gráfico da restrição do cosseno com relação a reta $y = x$.

O domínio é $[-1, 1]$ e sua imagem é $[0, \pi]$.

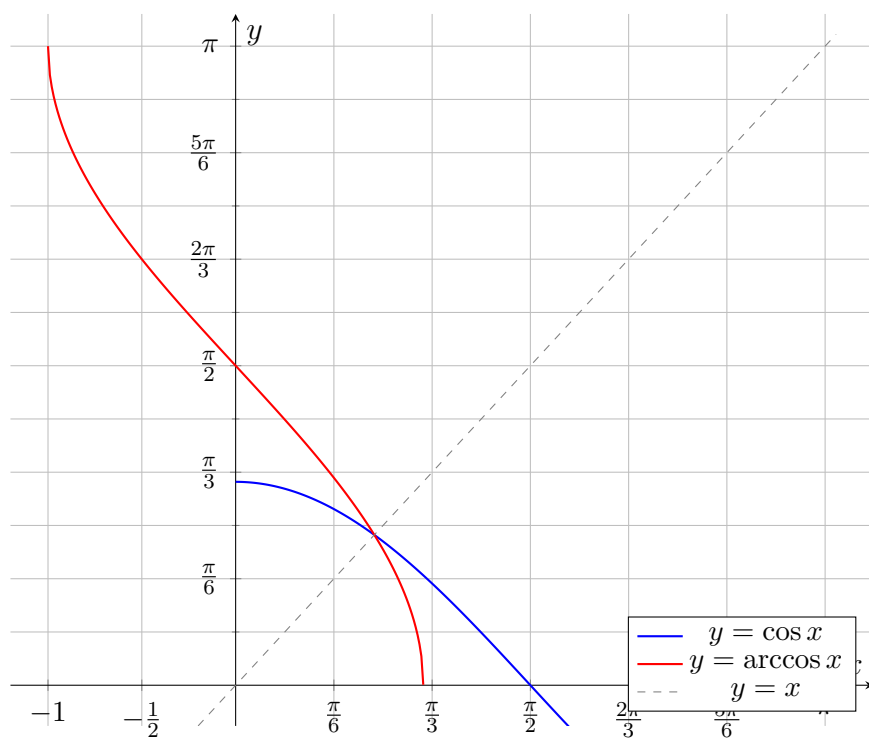


Figura 11: Função cosseno e sua inversa.

Visualize apenas a função arco cosseno no gráfico abaixo.

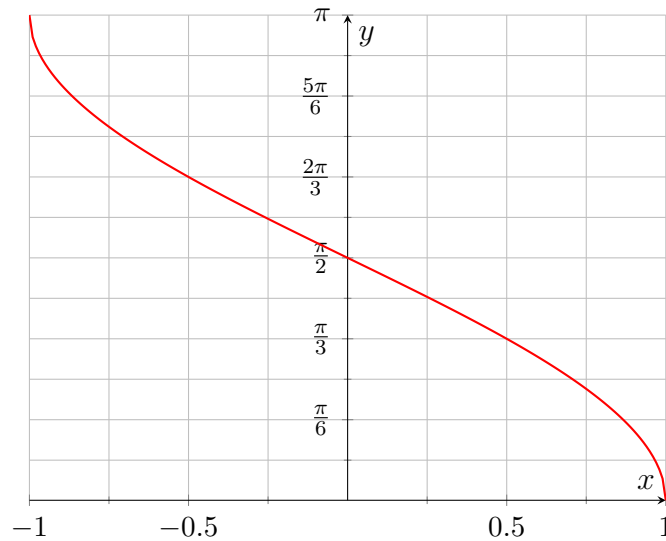


Figura 12: Função arco cosseno

12.3 A função arco tangente: $\arctan$

Restringimos o domínio da função tangente ao intervalo aberto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Retiramos os extremos do intervalo para o denominador não se anular. Agora esta restrição é invertível porque para cada valor x da imagem, existe um único t em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tal que $\tan(t) = x$. A função inversa da restrição da tangente é chamada de função arco tangente. Escrevemos $\arctan(x)$.

O gráfico de $y = \arctan(x)$ é dado pela reflexão do gráfico da restrição da tangente com relação a reta $y = x$. O domínio é $\mathbb{R}$ e sua imagem é $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Veja o seu gráfico na figura 13, desenhado apenas no intervalo $[0, \pi]$.

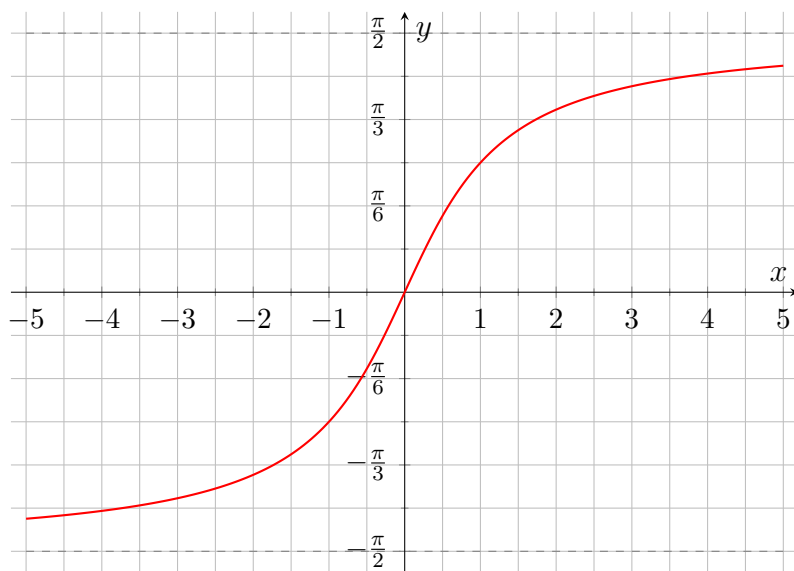


Figura 13: Função arcotangente

12.4 A função arco cotangente: accot

Restringimos o domínio da função cotangente ao intervalo $(0, \pi)$. Agora esta restrição é invertível, pois cada valor da imagem corresponde a exatamente um ponto do domínio. A função inversa desta restrição da cotangente é chamada função arco cotangente. Escrevemos $\text{arccot}(x)$.

O gráfico de $y = \text{arccot}(x)$ é dado pela reflexão do gráfico da restrição da cotangente com relação a reta $y = x$. O domínio de $\mathbb{R}$ e a imagem é $(0, \pi)$.

13 Fórmulas de soma

13.1 $\cos(u + v)$

$$\cos(u + v) = \cos(u) \cdot \cos(v) - \sin(u) \cdot \sin(v).$$

Vamos dar uma prova elementar dessa fórmula da soma.

Consideremos dois ângulos a e b . Tomemos os pontos P e B , sobre o círculo trigonométrico, como indicados na figura 14. Vamos calcular a distância entre P e B . Tomemos o sistema de coordenadas usuais, assim $P = (1, 0)$ e $B = (\cos(a +$

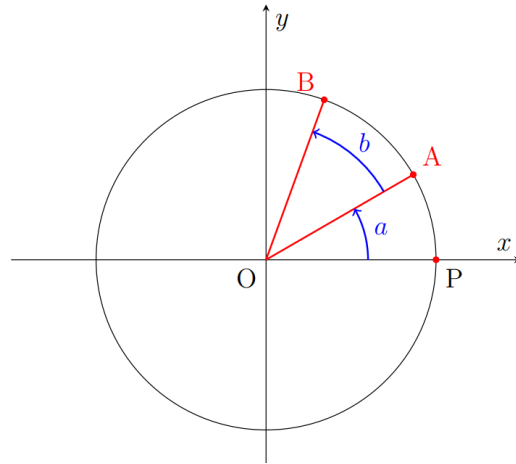


Figura 14: Fórmula da soma

$b), \sin(a + b))$. Se d é a distância entre P e B , então

$$d^2 = \sin^2(a + b) + (\cos(a + b) - 1)^2 = -2 \cos(a + b) + 2.$$

Agora mudamos o nosso sistema de coordenadas: fazemos o eixo dos X coincidirem com a reta OA . Assim, as coordenadas de

$$P = (\cos(-a), \sin(-a)) = (\cos(a), -\sin(a)).$$

As coordenadas de B são simples $B = (\cos(b), \sin(b))$. Agora,

$$d^2 = (\sin(b) + \sin(a))^2 + (\cos(b) - \cos(a))^2 = 2 + 2 \sin(a) \sin(b) - 2 \cos(a) \cos(b).$$

Como a distância d é igual, comparamos e obtemos

$$\boxed{\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)}.$$

13.2 $\cos(u - v)$

Observemos que

$$\cos(u - v) = \cos(u + (-v)) = \cos(u) \cos(-v) - \sin(u) \sin(-v) = \cos(u) \cos(v) + \sin(u) \sin(v).$$

Logo,

$$\boxed{\cos(u - v) = \cos(u) \cdot \cos(v) + \sin(u) \cdot \sin(v)}.$$

13.3 $\sin(u - v)$

Observemos que

$$\sin(u - v) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (u - v)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + v\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \cos(v) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \sin(v).$$

Logo,

$$\boxed{\sin(u - v) = \sin(u) \cdot \cos(v) - \cos(u) \cdot \sin(v)}.$$

13.4 $\sin(u + v)$

Observemos que

$$\begin{aligned}\sin(u + v) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (u + v)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - u\right) - v\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \cos(v) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cdot \sin(v) \\ &= \sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v).\end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{\sin(u + v) = \sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v)}.$$

13.5 $\tan(u + v)$

Observamos que

$$\tan(u + v) = \frac{\sin(u + v)}{\cos(u + v)} = \frac{\sin(u) \cdot \cos(v) + \cos(u) \cdot \sin(v)}{\cos(u) \cdot \cos(v) - \sin(u) \cdot \sin(v)}.$$

Dividindo o denominador e o numerador por $\cos(u) \cdot \cos(v)$ obtemos:

$$\boxed{\tan(u + v) = \frac{\tan(u) + \tan(v)}{1 - \tan(u) \cdot \tan(v)}}.$$

13.6 $\tan(u - v)$

Do mesmo modo obtemos

$$\tan(u - v) = \frac{\tan(u) - \tan(v)}{1 + \tan(u) \cdot \tan(v)}.$$

13.7 $\sin(2u)$

Observamos que

$$\sin(2u) = \sin(u + u) = \sin(u) \cdot \cos(u) + \cos(u) \cdot \sin(u) = 2 \sin(u) \cdot \cos(u).$$

Logo,

$$\sin(2u) = 2 \sin(u) \cdot \cos(u).$$

13.8 $\cos(2u)$

Do mesmo modo,

$$\cos(2u) = \cos(u + u) = \cos(u) \cdot \cos(u) - \sin(u) \cdot \sin(u) = \cos^2(u) - \sin^2(u).$$

13.9 $\tan(2u)$

Observemos que

$$\tan(2u) = \frac{\tan(u) + \tan(u)}{1 - \tan(u) \cdot \tan(u)} = \frac{2 \tan(u)}{1 - \tan^2(u)}.$$

Logo,

$$\tan(2u) = \frac{2 \tan(u)}{1 - \tan^2(u)}.$$

14 Fórmulas de Carnot

$$\begin{aligned} 1 + \cos(2u) &= 1 + \cos^2(u) - \sin^2(u) = 2 \cos^2(u) \\ 1 - \cos(2u) &= 1 - \cos^2(u) + \sin^2(u) = 2 \sin^2(u). \end{aligned}$$

$$1 + \cos(2u) = 2 \cos^2(u) \quad \text{e} \quad 1 - \cos(2u) = 2 \sin^2(u).$$

Estas fórmulas são utilizadas do seguinte modo:

$$\cos^2(u) = \frac{1 + \cos(2u)}{2}$$

e

$$\sin^2(u) = \frac{1 - \cos(2u)}{2}.$$

15 t -fórmulas

Das fórmulas de Carnot, obtemos

$$\begin{aligned}\cos(2u) &= 2\cos^2(u) - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \tan^2(u)} - 1 \\ &= \frac{1 - \tan^2(u)}{1 + \tan^2(u)}\end{aligned}$$

Como

$$\tan(2u) = \frac{2\tan(u)}{1 - \tan^2(u)},$$

então

$$\sin(2u) = \frac{2\tan(u)}{1 + \tan^2(u)}$$

Fazendo $t = \tan(u)$, então

$\begin{aligned}\cos(2u) &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \sin(2u) &= \frac{2t}{1 + t^2} \\ \tan(2u) &= \frac{2t}{1 - t^2}\end{aligned}$

Estas 3 fórmulas são chamadas t -fórmulas.

16 Equações trigonométricas

16.1 Equações básicas $\cos(u) = \cos(v)$

Com a ajuda do círculo trigonométrico vemos que:

$$\cos(u) = \cos(v) \Leftrightarrow u = \pm v + k.2\pi,$$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

16.2 $\sin(u) = \sin(v)$

Com a ajuda do círculo trigonométrico vemos que:

$$\sin(u) = \sin(v) \Leftrightarrow u = v + 2.k.\pi \text{ ou } u = \pi - v + 2.k.\pi.$$

16.3 $\tan(u) = \tan(v)$

Com a ajuda do círculo trigonométrico vemos que:

$$\tan(u) = \tan(v) \Leftrightarrow u = v + k.\pi.$$

16.4 $\cot(u) = \cot(v)$

Com a ajuda do círculo trigonométrico vemos que:

$$\cot(u) = \cot(v) \Leftrightarrow u = v + k.\pi.$$

17 Reduzindo a equações básicas

17.1 Exemplo 1

Resolver $\cos(2x) = \cos(\pi - 3x)$.

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(\pi - 3x) \\ \Leftrightarrow 2x &= (\pi - 3x) + 2.k.\pi \text{ ou } 2x = -(\pi - 3x) + 2.k'.\pi \\ \Leftrightarrow 5x &= \pi + 2.k.\pi \text{ ou } -x = -\pi + 2.k'.\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{5} + \frac{2.k.\pi}{5} \text{ ou } x = \pi - 2.k'.\pi.\end{aligned}$$

17.2 Exemplo 2

Resolver $\tan(x - \frac{\pi}{2}) = \tan(2x)$

$$\begin{aligned}\tan(x - \frac{\pi}{2}) &= \tan(2x) \\ \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} &= 2x + k.\pi \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{2} - k.\pi.\end{aligned}$$

17.3 Usando uma variável adicional

17.4 Exemplo 3

Resolver $2\sin^2(2x) + \sin(2x) - 1 = 0$.

Fazendo a substituição $t = \sin(2x)$, obtemos a equação quadrática

$$2t^2 + t - 1 = 0,$$

cujas soluções são

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4},$$

ou seja,

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad t = -1.$$

Portanto, devemos resolver as equações

$$\sin(2x) = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(2x) = -1.$$

Se $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, então

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e, dividindo por 2,

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi.$$

Se $\sin(2x) = -1$, então

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

logo

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$$

Assim, o conjunto solução da equação é

$x = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

18 Usando fatoração

18.1 Exemplo 1

Resolver $3 \sin(2x) - 2 \sin(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 3 \sin(2x) - 2 \sin(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6 \sin(x) \cos(x) - 2 \sin(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin(x) (3 \cos(x) - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow x = k\pi \text{ ou } x \approx 1.23095 + 2k\pi &\text{ ou } x \approx -1.23095 + 2k'\pi \end{aligned}$$

18.2 Exemplo 2

Resolver a equação $a \sin(u) + b \cos(u) = c$.

Vamos transformar $a \sin(u) + b \cos(u)$ em $A \sin(u - u_0)$ ou $A \cos(u - u_0)$.

Consideremos $a \sin(u) + b \cos(u) = a(\sin(u) + \frac{b}{a} \cos(u))$. Tome u_0 tal que $\tan(u_0) = -\frac{b}{a}$.

Logo,

$$\begin{aligned} a \sin(u) + b \cos(u) &= a(\sin(u) + \frac{b}{a} \cos(u)) \\ &= a(\sin(u) - \tan(u_0) \cos(u)) \\ &= \frac{a}{\cos(u_0)} [\sin(u) \cos(u_0) - \sin(u_0) \cos(u)]. \end{aligned}$$

Seja $A = \frac{a}{\cos(u_0)}$. Então,

$$\begin{aligned} a \sin(u) + b \cos(u) &= \frac{a}{\cos(u_0)} [\sin(u) \cos(u_0) - \sin(u_0) \cos(u)] \\ &= A \sin(u - u_0) \\ &= A \cos\left(\frac{\pi}{2} - u + u_0\right) \\ &= A \cos(u - u'_0). \end{aligned}$$

Com esta redução podemos resolver a equação $a \sin(u) + b \cos(u) = c$.

18.3 Exemplo 3

Resolver a equação

$$3 \sin(2x) + 4 \cos(2x) = 2.$$

Observe que $3 \sin(2x) + 4 \cos(2x)$ pode ser escrito como $R \sin(2x + \varphi)$, onde

$$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Lembre-se de que qualquer expressão da forma $a \sin \theta + b \cos \theta$, com a e b reais não simultaneamente nulos, pode ser reescrita como uma única função seno:

$$a \sin \theta + b \cos \theta = R \sin(\theta + \varphi),$$

onde $R = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, e o ângulo φ é escolhido de modo que

$$\cos \varphi = \frac{a}{R}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{R}.$$

Essa identidade decorre diretamente da fórmula do seno da soma:

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi.$$

Agora, tomando $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ e $\sin \varphi = \frac{4}{5}$ (ou seja, $\varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$), temos

$$3 \sin(2x) + 4 \cos(2x) = 5 \sin(2x + \varphi).$$

A equação passa a ser

$$5 \sin(2x + \varphi) = 2 \quad \implies \quad \sin(2x + \varphi) = \frac{2}{5}.$$

Seja $\alpha = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$. Então,

$$2x + \varphi = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x + \varphi = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$x = \frac{\alpha - \varphi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi - \alpha - \varphi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo $\varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$ e $\alpha = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right)$, obtemos a solução exata. Se desejarmos uma aproximação decimal (útil para gráficos ou verificação numérica):

$$\varphi \approx 0.9273, \quad \alpha \approx 0.4115,$$

e, portanto,

$$x \approx -0.2579 + k\pi \quad \text{ou} \quad x \approx 0.9014 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Referências

- [1] Thomas, G. B., Weir, M. D., & Hass, J. (1995). *Thomas' Calculus* (14th ed.). Pearson.
- [2] Gelfand, I. M., & Saul, M. (1994). *Trigonometry*. Birkhäuser.