

Expansão em séries de Taylor

Prof. Doherty Andrade

Sumário

1	Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange	1
2	Principais Séries de Taylor em Torno da Origem	2
3	Exemplos	4
4	Exercícios	7
5	Outras Formulações	8
6	A Fórmula de Taylor para n variáveis	10

1 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

O polinômio de Taylor de grau n é dado por, numa vizinhança de $x = a$,

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

A principal propriedade deste polinômio é que ele passa pelo ponto $(a, f(a))$ e possui as mesmas derivadas até ordem n que a função f .

Como veremos nos exemplos, o polinômio de Taylor de f desenvolvido numa vizinhança de $x = a$ aproxima a função nesta vizinhança.

Cada vez que aproximamos um valor desconhecido por outro conhecido é importante saber estimar o erro que se comete ao fazer esta aproximação. Isto é estimar o erro para melhorar a aproximação se necessário. Queremos encontrar $\epsilon > 0$ de tal forma que

$$|f(x) - p_m(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta),$$

onde p_m é o polinômio de Taylor de grau m numa vizinhança de $x = a$.

Teorema 1.1 ► Teorema de Taylor

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com n derivadas contínuas e $f^{(n+1)}$ definida em todo (a, b) . Seja $x_0 \in [a, b]$ então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

O Teorema de Taylor é uma extensão do teorema do Valor médio. Isto é se consideramos $m = 1$ teremos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

Sua demonstração também segue a mesma ideia da demonstração do Teorema do Valor médio.

Demonstração do Teorema: Denotemos por

$$G(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k + A(x - t)^{n+1}$$

onde A é de tal forma que $G(x_0) = 0$. Portanto teremos que $G(x) = G(x_0) = 0$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in]x, x_0[$ tal que $G'(c) = 0$. Derivando G encontramos

$$G'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left\{ \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k \right\} - (n+1)A(x - t)^n$$

Lembrando das fórmulas das derivadas de um produto teremos que

$$G'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x - t)^{k-1} \right\} - (n+1)A(x - t)^n$$

Note que o somatório anterior é telescópico, portanto

$$G'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n - (n+1)A(x - t)^n \quad \Rightarrow \quad \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n)!} (x - c)^n = (n+1)A(x - c)^n$$

Tomando $t = c$, segue que

$$A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Tomando $t = x_0$ e aplicando o fato que $G(x_0) = 0$ obtemos o resultado. $\square$

2 Principais Séries de Taylor em Torno da Origem

Abaixo apresentamos uma lista das principais funções analíticas e suas respectivas séries de Taylor em torno de $x = 0$ (séries de Maclaurin). As séries são válidas dentro de seus raios de convergência.

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1$$

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

4.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \ln(1+x), \quad -1 < x \leq 1$$

6.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \tanh^{-1}(x), \quad |x| < 1$$

7.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \tan^{-1}(x), \quad |x| \leq 1$$

8.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha, \quad |x| < 1 \quad (\text{Série binomial generalizada})$$

onde $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

9.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1$$

11.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sin^{-1}(x), \quad |x| < 1$$

12.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sinh^{-1}(x), \quad |x| < 1$$

13.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n} = \frac{\sin^{-1}(x)}{x}, \quad 0 < |x| \leq 1$$

14.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}, \quad 0 < |x| < 1$$

Observações:

1. O raio de convergência é indicado quando diferente de todo $\mathbb{R}$.
2. A função $\tan^{-1}(x)$ converge também em $x = \pm 1$, por convergência alternada.
3. A série binomial generaliza potências reais, incluindo $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, etc.

3 Exemplos

Exemplo 3.1

Determine o m de tal forma que a aproximação

$$e^x \approx \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{n!},$$

para $x \in]0, 1[$, possua dois dígitos exatos.

O erro ao aproximar a exponencial pelo polinômio de Taylor está dado por

$$E_m = \frac{f^{(m)}(c)}{m!} (x)^n = \frac{e^c}{m!} (x)^m \leq \frac{e}{m!}$$

Para ter dois dígitos exatos, devemos ter que $E_m \leq 0,005$. Para obter esta estimativa fazemos

$$\frac{e}{m!} \leq 0,005 \quad \Rightarrow \quad m! \geq 200e = 543.6563656 \geq 544$$

Como $6! = 720$ podemos tomar $m = 6$. Isto é para qualquer valor $x \in (0, 1)$ a expressão

$$\sum_{n=0}^5 \frac{x^n}{n!}$$

aproxima ao exponencial e^x com dois dígitos exatos. □

Exemplo 3.2

Encontre a vizinhança de $x = 0$ na qual o polinômio de Taylor de grau 2 aproxima a função $y = \cos(x)$ com dois dígitos exatos.

O polinômio de Taylor de grau 2 é dado por

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \Rightarrow p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

O erro que cometemos ao aproximar a função $f(x) = \cos(x)$ por $p_2(x)$ é

$$|\cos(x) - p_2(x)| = \left| \frac{f'''(c)}{6}x^3 \right| < \varepsilon.$$

Como $f'''(x) = \sin(x)$, encontramos que

$$\frac{\sin(c)}{6}a^3 \leq \varepsilon, \quad \forall |x| < a.$$

Queremos que $\frac{\sin(c)}{6}a^3 < 0,005$ isto é $\sin(c)a^3 < 0,03$. Tomando $a = 0.4$ temos que $\sin(c)a^3 \leq 0.0256$.

Portanto, no intervalo $[-0.4, 0.4]$ a função $\cos(x)$ é aproximada por $p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$ com dois dígitos exatos. $\square$

Exemplo 3.3

Encontre a vizinhança de $x = 0$ na qual o polinômio de Taylor de grau 2 aproxima a função $y = \sqrt{1+x}$ com dois dígitos exatos.

Calculando as derivadas

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad y'' = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}, \quad y''' = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}.$$

O polinômio de Taylor de grau 2 é dado por

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \Rightarrow p_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2$$

O erro que temos ao aproximar a função $f(x) = \sqrt{1+x}$ por $p_2(x)$ é

$$|\sqrt{1+x} - p_2(x)| = \left| \frac{f'''(c)}{6}x^3 \right| < \varepsilon.$$

Como $f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$, encontramos que

$$\frac{1}{16(1-a)^{5/2}}a^3 \leq \varepsilon, \quad \forall |x| < a.$$

Queremos que $\frac{1}{16(1-a)^{5/2}}a^3 < 0,005$ isto é $\frac{1}{(1-a)^{5/2}}a^3 < 0,08$. Tomando $a = 0.39$ temos que $\frac{1}{16(1-a)^{5/2}}a^3 = .0759$. Portanto, no intervalo $[-0.39, 0.39]$ a função $\sqrt{(x+1)}$ é aproximada por $p_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}$ com dois dígitos exatos. $\square$

Exemplo 3.4

Encontre a vizinhança de $x = 0$ na qual o polinômio de Taylor de grau 2 aproxima a função $y = \sqrt{1+x^2}$ com dois dígitos exatos. Do exercício anterior sabemos que para todo $x \in [-0.39, 0.39]$ se verifica que

$$y = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \epsilon,$$

onde $\epsilon < 0,005$. Como

$$x \in [-0.39, 0.39] \Rightarrow x^2 \in [-0.39, 0.39]$$

Então podemos substituir x por x^2 , assim podemos aproximar

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \epsilon.$$

Exemplo 3.5

Mostre que para todo $x > 0$ se verifica a desigualdade:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Primeiro calculemos as derivadas de $f(x) = \ln(1+x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f''''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

Pelo Teorema de Taylor existe uma constante $c > 0$ tal que

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \Rightarrow p_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3(1+c)^3}x^3 \geq x - \frac{x^2}{2}.$$

Por outro lado, usando o Teorema de Taylor mais uma vez, encontramos que existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4(1+c_1)^4}x^4 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Das duas últimas desigualdades segue o resultado.

4 Exercícios

1. Calcule o polinômio de Taylor de grau 5 numa vizinhança de $x = 0$ das seguintes funções

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f(x) = \cos(x), \quad f(x) = \ln(1+x), \quad f(x) = e^{x^2}$$

Resp: a) $p(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$,

b) $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$,

c) $p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ d) $p(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$

2. Encontre o polinômio de Taylor de grau 5 da função $f(x) = xe^5$ **Resp:** $p(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24}$.

3. Calcule o polinômio de Taylor de grau da função numa vizinhança de $x = 0$ de $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ (sugestão: faça primeiro uma divisão) **Resp:** $p(x) = x^2 - x^3 + x^4 - x^5$

4. Calcule o polinômio de Taylor de grau da função numa vizinhança de $x = 0$ de $f(x) = 1/(1+x^2)$ **Resp:** $p(x) = 1 - x^2 + x^4$.

5. Usando o exercício anterior calcule o polinômio de Taylor de grau da função numa vizinhança de $x = 0$ de $f(x) = 1/(1+x+x^2)$ (sugestão: complete quadrados). **Resp:** $p(x) = 1 - x + x^3 - x^4$

6. Calcule o polinômio de Taylor de grau 5 da função numa vizinhança de $x = 0$ de $f(x) = 1/(1+x)^2$. **Resp:** $p(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + 6x^5$.

7. Usando o exercício anterior encontre o polinômio de Taylor de grau 5 das funções $f(x) = 1/(1+ax)^2$, $f(x) = 1/(b+ax)^2$.

Resp: a) $p(x) = 1 - 2ax + 3a^2x^2 - 4a^3x^3 + 5a^4x^4 + 6a^5x^5$

b) $p(x) = \frac{1}{b^2} \{1 - 2\frac{a}{b}x + 3(\frac{a}{b})^2x^2 - 4(\frac{a}{b})^3x^3 + 5(\frac{a}{b})^4x^4 + 6(\frac{a}{b})^5x^5\}$

8. Encontre o polinômio de Taylor de grau 3 numa vizinhança de $x = 1$ de $f(x) = \ln(1+2x)$. **Resp:** $p(x) = \ln(3) + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{8}{81}(x-1)^3$.

9. Mostre que para todo $x > 0$ se verifica a desigualdade:

$$2x - 2x^2 \leq \ln(1+2x) \leq 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3}.$$

10. Encontre a derivada de ordem m da função $f(x) = \ln(1+x)$. **Resp:** $f^{(m)}(x) = (-1)^{m+1} \frac{1}{(1+x)^m}$.

11. Encontre a derivada de ordem m da função $f(x) = \ln(1 + ax)$. **Resp:** $f^{(m)}(x) = (-1)^{m+1} \frac{a^m}{(1+x)^m}$.
12. Encontre o menor valor de n de tal forma que o polinômio de Taylor de grau n da função $f(x) = \ln(1 + x)$ aproxime f com dois dígitos exatos.

5 Outras Formulações

Primeiramente vamos nos concentrar no caso de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável. O polinômio de Taylor de f no ponto $a \in I$ é o polinômio $p(x) = \sum_0^n a_k x^k$ de grau menor do que ou igual a n tal que as suas derivadas no ponto $x = 0$ coincidam com as derivadas de mesma ordem de f no ponto $x = a$. Como $p^{(k)}(0) = k!a_k$ segue que o polinômio de Taylor é dado por

$$p(x) = \sum_0^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k.$$

Teorema 5.1 ► Fórmula de Taylor com resto infinitesimal

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. A função definida por $r : J \rightarrow \mathbb{R}$ onde J é o intervalo

$$J = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$$

pela igualdade

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + r(h)$$

satisfaz

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

Reciprocamente, se $p(h)$ é um polinômio de grau $\leq n$ tal que $r(h) = f(h) - p(h)$ cumpre

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0,$$

então $p(h)$ é o polinômio de Taylor de f em a .

Teorema 5.2 ► Fórmula de Taylor com resto de Lagrange

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável $n + 1$ vezes em (a, b) com $f^{(n)}$ contínua em $[a, b]$. Existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{(n+1)}.$$

Tomando $b = x$, obtemos

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

Teorema 5.3 ► Fórmula de Taylor com resto integral

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ possui a $n + 1$ -ésima derivada contínua no intervalo de extremos a e $a + h$ pertencentes a I , então

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(h) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}(h)^n + h^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(a+th) dt.$$

Demonstração. Pelo Teorema fundamental do Cálculo, temos

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Integrando por partes, com $u = f'(t)$, $v = -(x-t)$, $du = f^{(2)}(t)dt$, $dv = dt$ obtemos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f^{(2)}(t) dt.$$

Repetindo o argumento na integral acima, fazendo $u = f'$, $v = -\frac{(x-t)^2}{2}$, $du = f^{(3)}$, $dv = (x-t)dt$. Disto resulta que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t) dt$$

Repetimos o processo e usando indução matemática, obtemos o teorema. □

Observação 5.4

Seja I um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é analítica em I se para cada $c \in I$ existe uma sequência de reais (a_n) e $\delta > 0$ tal que

$$f(x) = \sum a_n (x-c)^n$$

para todo x com $|x-c| < \delta$.

A série de Taylor, em alguns casos, é a série acima. Veremos mais sobre isto adiante.

Uma série de potências é uma expressão da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Como exemplo simples, tomemos a seguinte série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Note que seus termos formam uma progressão geométrica. Assim, fica fácil determinar o valor da sua soma.

Ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (*)$$

x pertence ao intervalo $[-1,1)$.

Note que podemos usar esta série para determinar a soma de outras. Vejamos um exemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^{(2n)}$$

$y = x^2$ e usando (*) obtemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^{(2n)} = \frac{1}{1-y^2}$$

Note que a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ também pode ser calculada usando a igualdade (*), para isto basta tomar $-x$ no lugar de x para obter

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{x+1}$$

6 A Fórmula de Taylor para n variáveis

Nesta seção vamos utilizar o operador ∇ muitas vezes. Vamos fazer algumas observações sobre este importante operador diferencial.

O operador diferencial ∇ (para duas variáveis) é dado por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

assim ∇f é o seguinte vetor:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Agora vamos calcular o seguinte produto interno: $\nabla \cdot \nabla f$.

$$\nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

isto é,

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Agora vamos fazer outra continha usando o operador ∇ : se $H = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ vamos calcular $(H \cdot \nabla)^2 f(x, y)$.

$$(H \cdot \nabla)^2 f = \left[(h, k) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right]^2 f(x, y),$$

isto é,

$$(H \cdot \nabla)^2 f = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f.$$

Ou seja,

$$(H \cdot \nabla)^2 f = \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y).$$

O que resulta em,

$$(H \cdot \nabla)^2 f = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Agora vejamos o caso $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vamos nos fixar, por razões óbvias a $m = 1$. Para simplificar tomemos $n = 2$. Seja $P(a, b)$ e $H = (h, k)$ tal que $P + tH \in U$ onde $t \in [0, 1]$.

Seja

$$g(t) = f(P + tH) = f(a + th, b + tk).$$

Se g tem n derivadas contínuas, então

$$g(t) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}t + \dots + \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{g^{(n)}(\tau)}{n!}t^n.$$

Pela Regra da cadeia, temos

$$g'(t) = (H \cdot \nabla) f(P + tH).$$

e

$$g^{(2)}(t) = (H \cdot \nabla)^2 f(P + tH).$$

Em geral,

$$g^{(k)}(t) = (H \cdot \nabla)^k f(P + tH).$$

Teorema 6.1 ► Fórmula de Taylor para n variáveis

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto U e tendo derivadas parciais contínuas até ordem n . Então, existe τ entre 0 e 1 tal que

$$f(P + H) = f(P) + (H \cdot \nabla)f(P) + \cdots + \frac{(H \cdot \nabla)^{n-1}}{(n-1)!}f(P) + \frac{(H \cdot \nabla)^n}{n!}f(P + \tau H).$$

No caso de duas variáveis, a fórmula de Taylor fica:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(a, b) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(a, b) \\ &+ \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(a, b) \\ &+ \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(a + \tau h, b + \tau k) \end{aligned}$$

Exemplo 1: $f(x, y, z) = (x + y)^3$ em torno de $(0, 0, 0)$, até ordem 3

$$f(x, y) = (x + y)^3 \text{ e } f(0, 0) = 0 \text{ e } f(1, 2) = 27.$$

$$\text{Temos } f_x = 3(x + y)^2 \text{ e } f_x(0, 0) = 0 \text{ e } f_x(1, 2) = 27$$

$$f_y = 3(x + y)^2 \text{ e } f_y(0, 0) = 0 \text{ e } f_y(1, 2) = 27$$

$$f_{xy} = 6(x + y) \text{ e } f_{xy}(0, 0) = 0 \text{ e } f_{xy}(1, 2) = 18.$$

$$f_{xxx} = f_{xxy} = f_{xyy} = f_{yyy} = 6.$$

Assim, a série de Taylor é em torno do ponto $(0, 0)$.

$$f(u, v) = 0 + \frac{1}{3!} (6u^3 + 18u^2v + 18uv^2 + 6v^3) + R_3.$$

A série de Taylor em torno do ponto $(1, 2)$.

$$\begin{aligned} f(u, v) &= 27 + \frac{1}{1!} [27(u-1) + 27(v-2)] \\ &+ \frac{1}{2!} [18(u-1)^2 + 36(u-1)(v-2) + 18(v-2)^2] \\ &+ \frac{1}{3!} [6(u-1)^3 + 18(u-1)^2(v-2) + 18(u-1)(v-2)^2 + 6(v-2)^3] \\ &+ R_3. \end{aligned}$$

Exemplo 2: $f(x, y, z) = e^{x+y}$ em torno de $(0, 0, 0)$, até ordem 3

$$f(x, y) = e^{x+y} \text{ e } f(0, 0) = 1 \text{ e } f(1, 1) = e^2.$$

$$\text{Temos } f_x = e^{x+y} \text{ e } f_x(0, 0) = 1 \text{ e } f_x(1, 1) = e^2$$

$$f_y = e^{x+y} \text{ e } f_y(0, 0) = 1 \text{ e } f_y(1, 1) = e^2$$

$$f_{xy} = e^{x+y} \text{ e } f_{xy}(0, 0) = 1 \text{ e } f_{xy}(1, 1) = e^2$$

$$f_{xxx} = f_{xxy} = f_{xyy} = f_{yyy} = e^{x+y}. \text{ Assim, todas as derivadas de ordem 3 valem 1 em } (0, 0) \text{ e } e^2 \text{ em } (1, 1).$$

Assim, a série de Taylor em torno do ponto $(0, 0)$ é:

$$f(u, v) = 1 + \frac{1}{1!}(u + v) + \frac{1}{2!}(u^2 + 2uv + v^2) + \frac{1}{3!}(u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) + R_3.$$

A série de Taylor em torno do ponto $(1, 1)$:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= e^2 + \frac{1}{1!} [e^2(u - 1) + e^2(v - 1)] \\ &+ \frac{1}{2!} [e^2(u - 1)^2 + 2e^2(u - 1)(v - 1) + e^2(v - 1)^2] \\ &+ \frac{1}{3!} [e^2(u - 1)^3 + 3e^2(u - 1)^2(v - 1) + 3e^2(u - 1)(v - 1)^2 + e^2(v - 1)^3] \\ &+ R_3. \end{aligned}$$

Exemplo 3: $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ em torno de $(0, 0, 0)$, até ordem 2

$$f(x, y, z) = (x + y + z)^2 \text{ e } f(0, 0, 0) = 0, f(1, 1, 1) = 9.$$

Temos as derivadas parciais de primeira ordem:

$$f_x = 2(x + y + z), \quad f_x(0, 0, 0) = 0, \quad f_x(1, 1, 1) = 6$$

$$f_y = 2(x + y + z), \quad f_y(0, 0, 0) = 0, \quad f_y(1, 1, 1) = 6$$

$$f_z = 2(x + y + z), \quad f_z(0, 0, 0) = 0, \quad f_z(1, 1, 1) = 6$$

Derivadas parciais de segunda ordem:

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{zz} = 2$$

$$f_{xy} = f_{xz} = f_{yx} = f_{yz} = f_{zx} = f_{zy} = 2$$

Todas as derivadas segundas são constantes, logo:

$$f_{xx}(0, 0, 0) = f_{xy}(0, 0, 0) = \dots = 2, \text{ e o mesmo vale em } (1, 1, 1).$$

As derivadas de terceira ordem são todas nulas, pois as de segunda são constantes.

Assim, a série de Taylor de ordem 2 em torno do ponto $(0, 0, 0)$ é:

$$f(u, v, w) = 0 + \frac{1}{1!}(2u + 2v + 2w) + \frac{1}{2!}(2u^2 + 2v^2 + 2w^2 + 4uv + 4uw + 4vw) + R_2.$$

Simplificando:

$$f(u, v, w) = 2u + 2v + 2w + u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2uw + 2vw + R_2$$

ou, de forma compacta:

$$f(u, v, w) = (u + v + w)^2 + 2(u + v + w)$$

Note que neste caso a expansão reflete a forma quadrática. Agora, a expansão em torno do ponto $(1, 1, 1)$:

$$\begin{aligned} f(u, v, w) &= 9 + \frac{1}{1!} [6(u - 1) + 6(v - 1) + 6(w - 1)] \\ &+ \frac{1}{2!} [2(u - 1)^2 + 2(v - 1)^2 + 2(w - 1)^2 + 4(u - 1)(v - 1) + 4(u - 1)(w - 1) + 4(v - 1)(w - 1)] \\ &= 9 + 6(u - 1) + 6(v - 1) + 6(w - 1) \\ &+ (u - 1)^2 + (v - 1)^2 + (w - 1)^2 + 2(u - 1)(v - 1) + 2(u - 1)(w - 1) + 2(v - 1)(w - 1) + R_2. \end{aligned}$$

Observamos que esta expansão corresponde a:

$$f(u, v, w) = (1 + (u - 1) + 1 + (v - 1) + 1 + (w - 1))^2 = (u + v + w)^2,$$

como esperado, confirmando a exatidão da série (com resto nulo a partir da segunda ordem).

Exemplo 4: $f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$ em torno de $(0, 0, 0)$, até ordem 2

$f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$, com $f(0, 0, 0) = \cos(0) = 1$ e $f(\frac{\pi}{2}, 0, 0) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Vamos calcular as derivadas parciais até a ordem 2, notando que todas as derivadas envolvem senos e cossenos da soma $x + y + z$, e denotaremos $s = x + y + z$.

Primeiras derivadas:

$$f_x = -\sin(s), \quad f_y = -\sin(s), \quad f_z = -\sin(s)$$

Em $(0, 0, 0)$: $f_x(0, 0, 0) = -\sin(0) = 0$, analogamente $f_y = f_z = 0$

Segundas derivadas:

$$f_{xx} = -\cos(s), \quad f_{yy} = -\cos(s), \quad f_{zz} = -\cos(s)$$

$$f_{xy} = f_{xz} = f_{yx} = f_{yz} = f_{zx} = f_{zy} = -\cos(s)$$

$f_{xx}(0,0,0) = -\cos(0) = -1$, e o mesmo para todas as segundas derivadas: todas valem -1 em $(0,0,0)$

Todas as derivadas terceiras envolvem $\sin(s)$, por exemplo:

$f_{xxx} = \sin(s)$, $f_{xxy} = \sin(s)$, etc. — todas iguais a $\sin(s)$, logo valem 0 em $(0,0,0)$

Agora, a expansão de Taylor de ordem 2 em torno de $(0,0,0)$:

$$f(u, v, w) = f(0,0,0) + \sum_i f_{x_i}(0,0,0) \cdot (x_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} f_{x_i x_j}(0,0,0) \cdot x_i x_j + R_2$$

Substituindo:

$$f(u, v, w) = 1 + 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w + \frac{1}{2} \left[-u^2 - v^2 - w^2 - 2uv - 2uw - 2vw \right] + R_2$$

Agrupando:

$$f(u, v, w) = 1 - \frac{1}{2}(u + v + w)^2 + R_2$$

Este resultado é consistente com a expansão de $\cos(\theta)$ em torno de $\theta = 0$: $\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, com $\theta = u + v + w$.

Agora, consideremos a expansão em torno do ponto $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$. Neste caso, $s = \frac{\pi}{2} + v + w$, e $f(\frac{\pi}{2}, 0, 0) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

Calculemos as derivadas no ponto $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$:

$$f_x = -\sin(s) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1, \quad f_y = -1, \quad f_z = -1$$

$$f_{xx} = -\cos(s) = -\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \text{e todas as segundas derivadas: } f_{xy} = f_{xz} = \dots = 0$$

Todas as derivadas segundas são nulas neste ponto.

Assim, a expansão de Taylor de ordem 1 (já que segundas derivadas são nulas) em torno de $(\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ é:

$$\begin{aligned} f(u, v, w) &= 0 + f_x \cdot \left(u - \frac{\pi}{2}\right) + f_y \cdot v + f_z \cdot w + \frac{1}{2!}(0) + R_1 \\ &= -\left(u - \frac{\pi}{2}\right) - v - w + R_1 \\ &= -\left(u + v + w - \frac{\pi}{2}\right) + R_1 \end{aligned}$$

Este resultado é coerente com a aproximação linear de $\cos(\theta)$ perto de $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\cos(\theta) \approx -(\theta - \frac{\pi}{2})$, onde $\theta = u + v + w$.

Portanto, a série de Taylor reflete corretamente o comportamento local da função $\cos(x + y + z)$ nos pontos considerados.

Expansão de Taylor em Forma Matricial

Para uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, a expansão de Taylor de ordem 2 em torno de um ponto $\mathbf{a}$ é dada por:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^T \mathbf{h} + \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H(\mathbf{a}) \mathbf{h} + R_2(\mathbf{h}),$$

onde: - $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ é o vetor de incrementos, - $\nabla f(\mathbf{a})$ é o gradiente de f em $\mathbf{a}$, - $H(\mathbf{a})$ é a matriz Hessiana de f em $\mathbf{a}$, cujas entradas são $H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$, - $R_2(\mathbf{h})$ é o resto de ordem 2, com $\frac{R_2(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \rightarrow 0$ quando $\mathbf{h} \rightarrow 0$.

Exemplo: $f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$ em torno de $(0, 0, 0)$

Seja $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$, e $\mathbf{h} = (u, v, w)^T$.

1. Valor da função:

$$f(0, 0, 0) = \cos(0) = 1$$

2. Gradiente:

$$\nabla f(x, y, z) = (-\sin(x + y + z), -\sin(x + y + z), -\sin(x + y + z))$$

$$\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

3. Matriz Hessiana:

Todas as segundas derivadas são: - $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = -\cos(x + y + z)$ - $f_{xy} = f_{xz} = f_{yz} = -\cos(x + y + z)$ (e simétricas)

Em $(0, 0, 0)$, $\cos(0) = 1$, logo:

$$H(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Expansão matricial:

$$f(u, v, w) = 1 + \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + R_2$$

Calculando o termo quadrático:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u-v-w \\ -u-v-w \\ -u-v-w \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} [u(-u-v-w) + v(-u-v-w) + w(-u-v-w)] \\ &= \frac{1}{2} [-(u+v+w)^2] = -\frac{1}{2}(u+v+w)^2 \end{aligned}$$

Portanto, a expansão é:

$$f(u, v, w) = 1 - \frac{1}{2}(u+v+w)^2 + R_2,$$

coerente com o desenvolvimento anterior.

A forma matricial permite visualizar claramente a estrutura da aproximação quadrática. Neste caso, a Hessiana tem posto 1 (todas as linhas são iguais), refletindo a dependência da função apenas da soma $x + y + z$. Isso mostra que a função é constante nas direções perpendiculares ao vetor $(1, 1, 1)$, e a curvatura ocorre apenas ao longo dessa direção.

Exemplo 5: $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ em torno de $(0, 0, 0)$, até ordem 3

Considere a função $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$. Seja $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$ e $\mathbf{h} = (u, v, w)^T$. A expansão de Taylor de ordem 3 é dada por:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^T \mathbf{h} + \frac{1}{2!} \mathbf{h}^T H(\mathbf{a}) \mathbf{h} + \frac{1}{3!} \mathcal{T}(\mathbf{h}, \mathbf{h}, \mathbf{h}) + R_3(\mathbf{h}),$$

onde $\mathcal{T}$ representa a forma trilinear associada às derivadas terceiras.

1. Valor da função em $(0, 0, 0)$

$$f(0, 0, 0) = e^0 = 1$$

2. Gradiente (derivadas de ordem 1)

Como $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$, todas as derivadas parciais de primeira ordem são iguais a f :

$$f_x = e^{x+y+z}, \quad f_y = e^{x+y+z}, \quad f_z = e^{x+y+z}$$

Em $(0, 0, 0)$:

$$\nabla f(0, 0, 0) = (1, 1, 1)$$

Assim, o termo linear é:

$$\nabla f^T \mathbf{h} = 1 \cdot u + 1 \cdot v + 1 \cdot w = u + v + w$$

3. Matriz Hessiana (derivadas de ordem 2)

Todas as derivadas segundas são também e^{x+y+z} , pois derivar novamente qualquer primeira derivada retorna a própria função.

$$- f_{xx} = f_{xy} = f_{xz} = f_{yy} = f_{yz} = f_{zz} = e^{x+y+z}$$

Em $(0,0,0)$, todas valem 1.

Logo, a matriz Hessiana é:

$$H(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O termo quadrático é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{h}^T H \mathbf{h} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u+v+w \\ u+v+w \\ u+v+w \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [u(u+v+w) + v(u+v+w) + w(u+v+w)] = \frac{1}{2} (u+v+w)^2 \end{aligned}$$

4. Derivadas de ordem 3 e termo cúbico

Todas as derivadas parciais de ordem 3 são também iguais a e^{x+y+z} , pois cada derivação adicional mantém a forma exponencial. Por exemplo:

$$- f_{xxx} = f_{xxy} = f_{xyz} = \dots = e^{x+y+z}$$

Em $(0,0,0)$, todas valem 1.

O termo cúbico na série de Taylor é dado por:

$$\frac{1}{6} \sum_{i,j,k \in \{x,y,z\}} f_{ijk}(0,0,0) \cdot h_i h_j h_k = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} 1 \cdot h_i h_j h_k = \frac{1}{6} (u+v+w)^3$$

Isso porque a soma de todos os produtos $h_i h_j h_k$ com índices independentes é exatamente a expansão de $(u+v+w)^3$, e há $3^3 = 27$ termos, mas a fórmula com fatorial já os agrupa corretamente.

Portanto:

$$\frac{1}{6} \mathcal{T}(\mathbf{h}, \mathbf{h}, \mathbf{h}) = \frac{1}{6} (u+v+w)^3$$

5. Expansão completa até ordem 3

Agora reunimos todos os termos:

$$\begin{aligned} f(u, v, w) &= 1 + (u + v + w) + \frac{1}{2}(u + v + w)^2 + \frac{1}{6}(u + v + w)^3 + R_3 \\ &= \sum_{k=0}^3 \frac{(u + v + w)^k}{k!} + R_3 \end{aligned}$$

Este resultado é consistente com a série de Taylor escalar da função e^t em torno de $t = 0$, com $t = u + v + w$. De fato:

$$e^{u+v+w} = 1 + (u + v + w) + \frac{(u + v + w)^2}{2!} + \frac{(u + v + w)^3}{3!} + \dots$$

A forma matricial (e tensorial) da série de Taylor revela claramente a estrutura da aproximação:

- O gradiente uniforme reflete simetria nas variáveis.
- A Hessiana constante com todos os elementos iguais mostra acoplamento total entre as variáveis.
- O termo cúbico, dado por um tensor de ordem 3 com todas as componentes iguais a 1, resulta em $\frac{1}{6}(u + v + w)^3$.

Este exemplo ilustra como a simetria da função simplifica a expansão e permite uma expressão compacta.

Referências

- [1] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- [2] Courant, R., & John, F. (1988). *Introduction to Calculus and Analysis*. Springer-Verlag.
- [3] Figueiredo, D. G. (1974). *Análise I* (2ª ed.). LTC.
- [4] Stewart, J. (2016). *Cálculo* (8ª ed.). Cengage Learning.
- [5] Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (4th ed.). Wiley.
- [6] Lang, S. (1997). *Undergraduate Analysis* (2nd ed.). Springer.
- [7] Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). Wiley.
- [8] Folland, G. B. (1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* (2nd ed.). Wiley.