

Construção por Régua e Compasso

Prof. Doherty Andrade

doherty200@hotmail.com

Resumo

Neste texto exploramos o tema das construções geométricas com régua e compasso, um dos pilares da matemática grega antiga. Abordamos a definição precisa deste método construtivo, seu contexto histórico desde os *Elementos* de Euclides até os problemas clássicos da Antiguidade, e os resultados matemáticos modernos que resolveram definitivamente a possibilidade ou impossibilidade de tais construções, com destaque para a teoria de Galois.

1 Introdução

As **construções com régua e compasso** representam um dos métodos mais antigos e fundamentais da Geometria. Desenvolvidas sistematicamente pelos matemáticos da Grécia Antiga, estas construções limitam-se ao uso de apenas dois instrumentos: uma **régua não graduada** (para traçar retas) e um **compasso** (para traçar circunferências). A simplicidade e elegância deste método escondem uma profundidade teórica que só seria completamente compreendida milênios depois, com o desenvolvimento da álgebra abstrata.

Definição 1.1: Construção com régua e compasso

Uma **construção com régua e compasso** é uma sequência finita de passos elementares que permitem construir pontos, retas e circunferências a partir de um conjunto inicial de objetos (tipicamente dois pontos definindo uma unidade de medida). Os únicos passos permitidos são:

1. Traçar uma reta que passe por dois pontos já construídos.
2. Traçar uma circunferência com centro em um ponto já construído e passando por outro ponto já construído.
3. Marcar pontos de interseção de retas e circunferências já construídas.

Diz-se que um número real α é **construtível** se, a partir de um segmento unitário, é possível construir um segmento de comprimento $|\alpha|$ em um número finito de passos.

A partir dos postulados básicos, os geômetras gregos desenvolveram procedimentos para:

- Construir a mediatriz de um segmento.
- Traçar a bissetriz de um ângulo.
- Construir retas paralelas e perpendiculares.
- Dividir um segmento em partes iguais.

A obra *Os Elementos* (c. 300 a.C.) de Euclides organizou sistematicamente o conhecimento geométrico da época, apresentando as construções com régua e compasso como fundamento da geometria. Os **três problemas clássicos** da Antiguidade emergiram como os maiores desafios deste método:

1. **Duplicação do Cubo:** Construir a aresta de um cubo cujo volume seja o dobro de um cubo dado.
2. **Trisecção do Ângulo:** Dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais.
3. **Quadratura do Círculo:** Construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado.

Durante séculos, matemáticos buscaram soluções para estes problemas dentro das restrições da régua e compasso. Embora soluções aproximadas e métodos usando instrumentos adicionais tenham sido desenvolvidos, a questão fundamental permaneceu: *é possível resolver estes problemas usando apenas régua e compasso?*

A resposta definitiva para os problemas clássicos só surgiu no século XIX, com a conexão estabelecida entre Geometria e Álgebra.

Teorema 1.2: Caracterização dos Números Construtíveis

Um número real α é construtível se e somente se existe uma sequência finita de corpos

$$\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k$$

tal que $\alpha \in F_k$ e cada extensão F_{i+1}/F_i é quadrática (ou seja, $[F_{i+1} : F_i] = 2$).

Corolário 1.3

Se α é construtível, então $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ é uma potência de 2.

Teorema 1.4

Os problemas da duplicação do cubo e da trisecção do ângulo são impossíveis com régua e compasso.

Teorema 1.5

O número π é transcendente, portanto a quadratura do círculo é impossível.

Teorema 1.6: Gauss

Um polígono regular de n lados é construtível se e somente se

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$$

onde $k \geq 0$ e os p_i são primos de Fermat distintos (primos da forma $F_r = 2^{2^r} + 1$).

Gauss provou a construtibilidade do heptadecágono ($n = 17$) aos 19 anos, um resultado notável.

As construções com régua e compasso, apesar de sua aparente simplicidade, continham profundas questões que impulsionaram o desenvolvimento de áreas inteiras da matemática. A resolução dos problemas clássicos não representou o fim do interesse no tema, mas sim a transformação de uma questão geométrica em problemas algébricos profundos, demonstrando a unidade essencial da matemática.

A teoria de Galois e o estudo das extensões de corpos forneceram o ferramental necessário para compreender completamente as limitações e possibilidades deste método construtivo milenar.

2 Construções com régua e compasso

Nesta seção mostraremos a impossibilidade de algumas construções geométricas usando apenas régua e compasso. A régua considerada não possui marca alguma, é apenas um instrumento que nos permite traçar retas unindo dois pontos.

Definição 2.1: Número construtível

Um número real α é dito construtível se, através do uso de apenas o compasso e a régua não-graduada, pudermos construir um segmento de comprimento $|\alpha|$. Consideraremos dado o segmento unitário.

Sabemos, da geometria elementar, traçar uma reta perpendicular e uma reta paralela a uma reta dada passando por um determinado ponto (usando apenas régua e compasso).

Utilizando apenas estas construções podemos, a partir de dois números construtíveis α e β , obter $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$, $\alpha \cdot \beta$ e α/β ($\beta \neq 0$). Assim, estes números também são construtíveis. Portanto, o conjunto W dos números reais construtíveis é um subcorpo de $\mathbb{R}$. Como $1 \in W$, temos que $\mathbb{Q} \subset W$.

Vamos repassar o conceito de número construtível para o plano cartesiano com o objetivo de obter equações cartesianas e, a partir delas, fazer um estudo algébrico.

Seja $F \subset \mathbb{R}$ um subcorpo de $\mathbb{R}$. Consideremos o plano $F \times F \subset \mathbb{R}^2$, onde todos os pontos (x, y) têm suas coordenadas em F . Uma reta que passa por dois pontos de $F \times F$ é

denominada reta de F e terá equação $ax + by + c = 0$ com $a, b, c \in F$. Uma circunferência com centro em $F \times F$ e raio em F é denominada circunferência de F e terá equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ com $a, b, c \in F$.

Chamaremos (I), (II), (III) abaixo de operações elementares em $F \times F$:

- (I) Interseção de duas retas em $F \times F$.
- (II) Interseção de uma reta em $F \times F$ e uma circunferência em $F \times F$.
- (III) Interseção de duas circunferências em $F \times F$.

Duas retas do plano $F \times F$ sempre se encontram num ponto de $F \times F$. Uma reta e uma circunferência se encontram em pontos de $F \times F$ ou em $F[\gamma] \times F[\gamma]$, sendo $\gamma^2 \in F^+$. A interseção de duas circunferências se reduz à interseção de uma delas com uma reta, logo novamente teremos pontos em $F \times F$ ou $F[\gamma] \times F[\gamma]$, onde $\gamma^2 \in F^+$.

Definição 2.2: Ponto construtível

Um ponto $A \in \mathbb{R}^2$ diz-se construtível a partir de $F \times F$ se podemos determinar A através de (um número finito de) operações elementares em $F \times F$.

Proposição 2.3

Um ponto $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ é construtível a partir de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ se, e somente se, as suas coordenadas são números construtíveis.

Lema 2.4

Um ponto $A \in \mathbb{R}^2$ é construtível a partir de $F \times F$ se, e somente se, existirem números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que $\lambda_1^2 \in F$, $\lambda_2^2 \in F[\lambda_1]$, $\lambda_3^2 \in F[\lambda_1, \lambda_2]$, $\dots$, $\lambda_n^2 \in F[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}]$ e $A \in F[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \times F[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

Demonstração: Se A é construtível a partir de $F \times F$, então podemos obter A através de operações elementares em $F \times F$. Já vimos que um ponto obtido através de uma operação elementar está em $F[\lambda_1] \times F[\lambda_1]$ com $\lambda_1^2 \in F$. Após um número finito de operações elementares obtemos $A \in F[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \times F[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

Reciprocamente, se $A \in F[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \times F[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, temos que A é construtível, pois podemos construir $\sqrt{\gamma}$ para qualquer γ construtível. ■

Teorema 2.5

O número real α é construtível se, e somente se, podemos determinar um número finito de números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que:

- (i) $\lambda_1^2 \in \mathbb{Q}$,
- (ii) $\lambda_i^2 \in \mathbb{Q}[\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}]$ para $i = 2, \dots, n$,
- (iii) $\alpha \in \mathbb{Q}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

Demonstração: Já vimos que α é construtível a partir de $\mathbb{Q}$ se, e somente se, $(\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^2$

é construtível a partir de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Pelo lema, isso ocorre se, e somente se, existirem $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nas condições acima com $\alpha \in \mathbb{Q}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. ■

Corolário 2.6

Se α é construtível, então α está em alguma extensão dos racionais de grau igual a uma potência de 2.

Demonstração: Como α é construtível, pelo teorema segue que $\alpha \in \mathbb{Q}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. Temos a cadeia

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\lambda_1] \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Q}[\lambda_1, \dots, \lambda_n],$$

e cada extensão tem grau 1 ou 2. Logo, $[\mathbb{Q}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] : \mathbb{Q}] = 2^r$ para algum $r \in \mathbb{N}$. ■

Corolário 2.7:

Se o número real α é raiz de um polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$ de grau k e se k não é uma potência de 2, então α não é construtível.

Demonstração: Se α fosse construtível, existiria um corpo $L \subset \mathbb{R}$ com $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = k$ dividindo $[L : \mathbb{Q}] = 2^r$, o que é impossível se k não é potência de 2. ■

Este último corolário nos habilita a resolver os antigos problemas da trissecção de um ângulo e duplicação do cubo.

Teorema 2.8:

impossível, por meio de régua e compasso, efetuar a trissecção do ângulo de 60° .

Demonstração: Se pudéssemos efetuar a trissecção de 60° , então $\alpha = \cos 20^\circ$ seria construtível. Usando $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$, com $\theta = 20^\circ$, obtemos $8\alpha^3 - 6\alpha - 1 = 0$. Este polinômio é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e de grau 3, não potência de 2. Pelo Corolário, α não é construtível. ■

Teorema 2.9

Por meio de régua e compasso é impossível duplicar o cubo unitário.

Demonstração: Duplicar o cubo unitário implica construir α tal que $\alpha^3 = 2$. O polinômio $x^3 - 2$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, e seu grau não é potência de 2. Logo, α não é construtível. ■

Um polígono é construtível se todos os seus vértices são pontos construtíveis do plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Assim, um polígono regular de n lados é construtível se, e somente se, o ponto $A = (\cos \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n})$ é construtível.

Teorema 2.10

É impossível construir um heptágono regular (polígono regular de 7 lados) por meio de régua e compasso.

Demonstração: A construção requer a construtibilidade de $\alpha = 2 \cos(2\pi/7)$, que satisfaz $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Como o grau é 3, não potência de 2, α não é construtível. ■

Proposição 2.11

- (a) Todo polígono regular de $n = 2^r$ lados é construtível.
- (b) Se um polígono regular de n lados é construtível, então o de $2n$ lados também é.
- (c) Se $p \geq 3$ é um primo e um polígono de p lados é construtível, então existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $p = 2^{2^s} + 1$.

Em particular, o heptágono (7 lados) não é construtível, mas o heptadecágono (17 lados) é, pois $17 = 2^{2^2} + 1$.

Demonstração: (a) e (b) seguem da construtibilidade do quadrado e da bissetriz de ângulo. Para (c), como $(\cos(2\pi/p), \sin(2\pi/p))$ é construtível, temos $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p - 1 = 2^r$, logo $p = 2^r + 1$. Se r tivesse fator ímpar > 1 , p não seria primo. Assim, $r = 2^s$. ■

Teorema 2.12: Gauss

Um polígono regular de n lados é construtível se, e somente se,

$$n = 2^r \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_k,$$

onde $r \in \mathbb{N}$, e $p_1, \dots, p_k$ são primos de Fermat distintos da forma $p_i = 2^{2^{s_i}} + 1$.

Os números $F_s = 2^{2^s} + 1$ são chamados primos de Fermat. Acreditava-se que fossem todos primos até Euler mostrar que F_5 é composto.

Exercício 2.13

1. Seja $L \supset K$ uma extensão de K , onde K é subcorpo de $\mathbb{C}$. Defina

$$\text{Aut}_K L = \{\sigma \in \text{Aut}(L) \mid \sigma(k) = k, \forall k \in K\}.$$

Seja $f(x) \in K[x]$ e $\alpha \in L$ raiz de $f(x)$. Prove que $\sigma(\alpha)$ também é raiz de $f(x)$, $\forall \sigma \in \text{Aut}_K L$.

2. Prove que $|\text{Aut } \mathbb{Q}[2^{1/4}]| = 2$ e que $\text{Gal}(x^4 - 2, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[2^{1/4}, i]$. Se $L = \text{Gal}(x^4 - 2, \mathbb{Q})$, então $|\text{Aut } L| = 8$.
3. Se $L = \text{Gal}(x^5 - 1, \mathbb{Q})$, então $|\text{Aut } L| = 4$.
4. Sejam p primo e $L = \text{Gal}(x^p - 1, \mathbb{Q})$. Então $|\text{Aut } L| = p - 1$.
5. Mostre que no plano as raízes n -ésimas da unidade são vértices de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio 1.
6. Verifique se os polinômios são irredutíveis:
- (a) $p(x) = x^3 + 8x - 2$, $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
- (b) $p(x) = x^5 - 10x - 6$, $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.
7. Verifique se os polígonos de 17 e 60 lados são construtíveis.

3 Construções de Polígonos Regulares

Teorema 3.1: Gauss

Um polígono regular de n lados é construtível com régua e compasso se e somente se

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_m$$

onde $k \geq 0$ e os p_i são primos de Fermat distintos (primos da forma $F_r = 2^{2^r} + 1$).

4 O Heptadecágono de Gauss

Um dos resultados mais notáveis na teoria das construções geométricas foi a demonstração por **Carl Friedrich Gauss** (1777–1855) da construtibilidade do **heptadecágono** (polígono regular de 17 lados). Gauss descobriu esta construção em **1796**, quando tinha apenas **19 anos**, e ficou tão orgulhoso deste achado que pediu que um heptadecágono fosse gravado em sua lápide.

A construção do heptadecágono era um problema em aberto desde a Antiguidade. Os gregos conheciam construções para polígonos regulares com número de lados:

$$3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, \dots$$

mas o caso $n = 17$ permanecia sem resposta. A construção de Gauss não apenas resolveu

este problema específico, mas estabeleceu uma **teoria geral** para a construtibilidade de polígonos regulares.

A chave para a descoberta de Gauss foi a conexão entre geometria e teoria dos números. Ele percebeu que a construtibilidade do heptadecágono está intimamente relacionada com as **raízes da unidade**:

As soluções da equação $z^{17} = 1$ são dadas por:

$$\zeta_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{17}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 16.$$

Gauss organizou estas raízes em **somas periódicas** (períodos gaussianos) que satisfazem equações quadráticas aninhadas. Especificamente, ele mostrou que $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ pode ser expresso através de uma sequência de equações quadráticas.

O número 17 é um **primo de Fermat**:

$$17 = 2^{2^2} + 1 = F_2,$$

e portanto satisfaz a condição do teorema de Gauss-Wantzel. A extensão de corpos:

$$[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/17}) : \mathbb{Q}] = 16 = 2^4$$

é uma potência de 2, garantindo a construtibilidade.

A descoberta de Gauss teve consequências profundas:

- Estabeleceu a conexão fundamental entre **teoria dos números e geometria**.
- Motivou o desenvolvimento da **teoria de Galois**.
- Abriu caminho para o estudo sistemático de **corpos ciclotômicos**.
- Demonstrou o poder dos métodos algébricos na resolução de problemas geométricos.

Gauss posteriormente generalizou este resultado, mostrando que um polígono regular de n lados é construtível se e somente se n é o produto de uma potência de 2 por primos de Fermat distintos.

Este fato histórico da matemática ilustra brilhantemente como um problema geométrico aparentemente simples pode conduzir às mais profundas descobertas na Álgebra Abstrata e na Teoria dos Números.

Referências

- [1] GONÇALVES, Adilson. *Introdução à Álgebra*. 5ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022. (Projeto Euclides. ISBN 978-85-244-0442-5)

- [2] GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. *Álgebra: Um Curso de Introdução*. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. (Projeto Euclides)
- [3] STILLWELL, John. *Mathematics and Its History*. 3ª ed. New York: Springer, 2010. (Capítulos 5 e 16 tratam de construções com régua e compasso e teoria de Galois)
- [4] HARTSHORNE, Robin. *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer, 2000. (Tratamento rigoroso das construções euclidianas e sua fundamentação algébrica)
- [5] COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. *What is Mathematics?* 2ª ed. Oxford: Oxford University Press, 1996. (Seção III.2: “Construções com Régua e Compasso”)
- [6] ROTMAN, Joseph J. *Galois Theory*. 2ª ed. New York: Springer, 1998. (Aplicações diretas à impossibilidade de construções clássicas)
- [7] EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução e comentário de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009. (Especialmente os Livros I–III, que fundamentam as construções geométricas)