O método da falsa posição

Prof. Doherty Andrade

www.metodosnumericos.com.br

1 Introdução

Estamos interessados em resolver a equação não linear $f(x) = 0$. Como hipóteses básicas consideramos que f tenha apenas uma (única) raiz em $[a, b]$, que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja contínua e que $f(a)f(b) < 0$.

Sabemos do teorema do valor intermediário que, nessas hipóteses, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Ou seja, a equação não linear $f(x) = 0$ tem uma solução no intervalo (a, b).

Vamos considerar nessa seção o método da falsa posição, também chamado de *regula falsi*, para determinar uma aproximação para essa raiz.

O método da bissecção tem convergência lenta, uma vez que seleciona sempre o ponto médio de cada intervalo. Então, podemos pensar em acelerar o método da bissecção selecionando um ponto que esteja mais próximo da raiz. Fazemos isso considerando como aproximação c para a raiz, a média ponderada entre a e b com pesos $|f(b)|$ e $|f(a)|$, respectivamente:

$$c = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(a)| + |f(b)|}. \tag{1}$$

A média ponderada c, estará mais próxima do extremo que tem menor valor pela função f.

A fim de simplificar a equação (1), consideremos os possíveis sinais de $f(a)$ e de $f(b)$.

Há dois casos:

1. $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$
2. $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$

No primeiro caso, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, temos que $|f(a)| = -f(a)$ e $|f(b)| = f(b)$, e, assim a expressão equação (1) fica:

$$c = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(a)| + |f(b)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{2}$$

No segundo caso, $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, temos que $|f(a)| = f(a)$ e $|f(b)| = -f(b)$, e, assim da equação (1) fica:

$$c = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(a)| + |f(b)|} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{3}$$

Observamos que nos dois casos, tem-se,

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{4}$$

2 Seleção dos subintervalos

Em cada iteração calculamos o ponto x_k e selecionamos o próximo subintervalo de busca da solução.

Suponha que estamos no intervalo $[a_k, b_k]$ com $f(a_k)f(b_k) < 0$ e calculamos x_k por meio da equação (5):

$$x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}. \tag{5}$$

Se $f(a_k)f(x_k) < 0$, então pelo teorema do valor intermediário, a raiz se encontra no subintervalo $[a_k, x_k]$.

Se $f(a_k)f(x_k) > 0$, então multiplicando por $f(a_k)f(b_k) < 0$ obtemos que

$$[f(a_k)]^2 f(x_k)f(b_k) < 0.$$

De onde segue que $f(x_k)f(b_k) < 0$. Pelo teorema do valor intermediário, a raiz se encontra no subintervalo $[x_k, b_k]$.

Resumindo temos:

1. se $f(a_k)f(x_k) < 0$, escolhemos para o próximo subintervalo o intervalo $[a_k, x_k]$.
2. se $f(a_k)f(x_k) > 0$, escolhemos para o próximo subintervalo o intervalo $[x_k, b_k]$.

3 Interpretação Geométrica

A aproximação dada pelo número $\overline{x}$, obtido por meio da equação (4), é o ponto de intersecção da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ com o eixo OX.

De fato, a equação da reta $y = Ax + B$ que passa por esses dois pontos, pode ser obtida por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

De onde segue que:

$$xf(a) + by + af(b) - bf(a) - ay - xf(b) = 0.$$

Portanto, isolando y, obtemos que a equação da reta é:

$$y = \frac{1}{b-a}\left[f(b) - f(a)\right]x + \frac{1}{b-a}\left[bf(a) - af(b)\right]. \tag{7}$$

No ponto de intersecção dessa reta com o eixo OX, devemos ter que $y = 0$ e assim,

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{8}$$

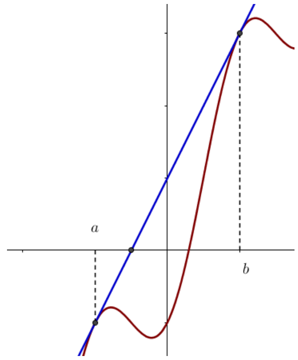

Figura 1: ponto de intersecção

4 Exemplo

A equação $2x - \cos(\pi x) = 0$ tem uma única (simples) raiz no intervalo $[-1, 1]$. Veja a figura 1.

Usando o método da falsa posição, obtemos a seguinte tabela.

k	a_k	b_k	x_k	$f(a_k)f(x_k)$
0	-1	1	-0.5	> 0 mesmo sinal, escolha $[x_k, b_k]$
1	-0.5	1	-0.125	> 0
2	-0.125	1	0.191399758	> 0
3	0.191399758	1	0.2951944354	> 0
4	0.2951944354	1	0.2974292581	< 0 sinais opostos, escolha $[a_k, x_k]$
5	0.2951944354	0.2974292581	0.2973056524	> 0
6	0.2973056524	0.2974292581	0.297305822	> 0

Segue que uma aproximação para a raiz é $c = 0.297305822$.

5 Convergência

O método da falsa posição gera uma sequência de pontos x_k obtidos por meio da equação (5). Sob quais condições essa sequência converge?

O teorema a seguir responde a essa pergunta.

Teorema 5.1 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a)f(b) < 0$, então a sequência de pontos x_k obtidos por meio do método da falsa posição, equação (5), é convergente.*

Para o caso de raiz simples, a ordem de convergência do método da falsa posição é a mesma do método da secante, isto é, $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

Referências

[1] DE FIGUEIREDO, D. G., **Análise I**. Rio de Janeiro: L.T.C., 1995.

[1] S. D. CONTE. *Elementary Numerical Analysis*. MacGraw-Hill, 1965.

[2] K. ATKINSON. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Willey& Sons, New York, 1983.