Regra de Cramer

Prof. Doherty Andrade

www.metodosnumericos.com.br

1. Introdução

Consideremos o sistema de equações lineares $Ax = b$. Suponha que A seja uma matriz $n \times n$ invertível (portanto, $\det(A) \neq 0$) e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ são elementos do $\mathbb{R}^n$. A regra de Cramer apresenta a solução do sistema por

$$x_i = \frac{\det(M_i)}{\det(A)}, i = 1, 2, \ldots, n$$

onde M_i é a matriz obtida de A pela substituição da i-ésima coluna pelo vetor coluna b.

2. Demonstração

Vamos demonstrar este resultado. Como $\det(A) \neq 0$, $Ax = b$ tem uma única solução que é $x = A^{-1}b$. Vamos denotar por a_i a i-ésima coluna de A, $i = 1, 2 \ldots, n$. Por e_i vamos denotar o i-ésimo vetor da base canônica, ou equivalentemente, a i-ésima coluna da matriz indentidade I_n. Seja X_i a matriz obtida de I_n pela substituição da i-ésima coluna pelo vetor coluna x.

Sabemos que no produto de matrizes, a k-ésima coluna de AB é o exatamente o produto de A pela k-ésima coluna de B. Note também que $Ae_k = a_k$ para $k = 1, \ldots, n$, a k-ésima coluna de A.

Assim, por multiplicação, temos que:

$$\begin{aligned}
AX_i &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & x_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & x_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n & \ldots & 1 \end{bmatrix} \\
&= (Ae_1, \ldots, Ae_{i-1}, Ax, Ae_{i+1}, \ldots, Ae_n) \\
&= (a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n) \\
&= M_i.
\end{aligned}$$

Como X_i é I_n com a i-ésima coluna substituída por x, calculando o determinante de X_i por cofatores, temos:

$$\det(X_i) = x_i \det(I_{n-1}) = 1 \cdot x_i \cdot 1 = x_i.$$

Logo,

$$\det(M_i) = \det(AX_i) = \det(A)\det(X_i) = \det(A)x_i.$$

$$x_i = \frac{\det(M_i)}{\det(A)}.$$

3. Outra demonstração

Consideremos o sistema de equações lineares $Ax = b$, em que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ são elementos do $\mathbb{R}^n$.

Suponha que A seja uma matriz $n \times n$ invertível (portanto, $\det(A) \neq 0$). Sabemos que $Ax = b$ tem solução única, pois como $\det(A) \neq 0$, a solução é dada por $x = A^{-1}b$.

A regra de Cramer apresenta a solução do sistema por

$$x_j = \frac{\det(M_j)}{\det(A)}, j = 1, 2, \ldots, n$$

onde M_j é a matriz obtida de A pela substituição da j-ésima coluna pelo vetor coluna b. Vamos demonstrar este resultado.

Vamos denotar por a_i a i-ésima coluna de A, $i = 1, 2 \ldots, n$. Vamos calcular o $\det(M_j)$:

$$\begin{aligned}
\det(M_j) &= \det[a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n] \\
&= \det[a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, Ax, a_{j+1}, \ldots, a_n] \\
&= \det[a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n, a_{j+1}, \ldots, a_n] \\
&= \det[a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x_1a_1, a_{j+1}, \ldots, a_n] \\
&+ \ \det[a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x_2a_2, a_{j+1}, \ldots, a_n] \\
&+ \ \cdots + \det[a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x_na_n, a_{j+1}, \ldots, a_n] \\
&= x_j \det[a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n] \\
&= x_j \det(A),
\end{aligned}$$

pois cada termo $\det[a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, x_ia_i, a_{j+1}, \ldots, a_n]$,com $i \neq j$ é nulo. Logo,

$$x_j = \frac{\det(M_j)}{\det(A)}.$$

4. Exemplo

Seja o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y - z = 6 \\ x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

Colocando-o na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Primeiramente, vamos escrever as matrizes $M_i, i = 1, 2, 3$, onde cada coluna i de A é substituída por $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calculando os determinantes:

$$\det(A) = 3,\ \det(M_1) = 9,\ \det(M_2) = 6,\ \det(M_3) = 15.$$

Segue que a solução é:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det(M_1)}{\det(A)} = \frac{9}{3} = 3 \\ y &= \frac{\det(M_2)}{\det(A)} = \frac{6}{3} = 2 \\ z &= \frac{\det(M_3)}{\det(A)} = \frac{-15}{3} = -5. \end{aligned}$$

O Cálculo de determinantes pela definição, não é computacionalmente eficiente, pois exige muito tempo de máquina. Do mesmo modo, a utilização da regra de Cramer para resolver sistemas de equações lineares não é computacionalmente bom. É adequado apenas para sistemas de pequeno porte. Pode-se provar que o número de operações necessárias para resolver um sistema de n equações e n variáveis, pela regra de Cramer, é igual a $n(n+1)! - 1$. Ou seja, cresce muito rapidamente com n.

5.Código Python

Neste código, você entra com a matriz A e o vetor b e o calculamos os determinantes e as soluções.

Faça o exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

In [7]:
```python
import numpy as np

def solve_linear_system(A, b):
    # Verificar se a matriz A é quadrada (3x3)
    if A.shape[0] != 3 or A.shape[1] != 3:
        raise ValueError("A matriz A deve ser 3x3.")

    # Calcular o determinante de A
    det_A = np.linalg.det(A)
    print(f"Determinante de A: {det_A:.6f}")

    # Verificar se o determinante de A é diferente de zero
```

```
    if det_A == 0:
        raise ValueError("O determinante de A é zero. O sistema pode não ter soluçã

    # Calcular os determinantes de Mi e as soluções usando a Regra de Cramer
    solutions = []
    for i in range(3):
        Mi = A.copy()
        Mi[:, i] = b
        det_Mi = np.linalg.det(Mi)
        print(f"Determinante de M{i+1}: {det_Mi:.6f}")
        xi = det_Mi / det_A
        solutions.append(xi)

    return solutions

# Solicitar entrada do usuário para a matriz A
A = np.zeros((3, 3))
print("Digite os elementos da matriz A (3x3):")
for i in range(3):
    for j in range(3):
        A[i, j] = float(input(f"A[{i+1}, {j+1}]: "))

# Solicitar entrada do usuário para o vetor b
b = np.zeros(3)
print("Digite os elementos do vetor b:")
for i in range(3):
    b[i] = float(input(f"b[{i+1}]: "))

# Resolver o sistema linear
try:
    solutions = solve_linear_system(A, b)
    print("\nSoluções do sistema:")
    for i, sol in enumerate(solutions):
        print(f"x{i+1} = {sol:.6f}  \t (x{i+1} = det(M{i+1}) / det(A))")
except ValueError as e:
    print(f"Erro: {e}")
```

```
Digite os elementos da matriz A (3x3):
A[1, 1]: 2
A[1, 2]: 1
A[1, 3]: 1
A[2, 1]: 1
A[2, 2]: -1
A[2, 3]: -1
A[3, 1]: 1
A[3, 2]: 2
A[3, 3]: 1
Digite os elementos do vetor b:
b[1]: 3
b[2]: 6
b[3]: 2
Determinante de A: 3.000000
Determinante de M1: 9.000000
Determinante de M2: 6.000000
Determinante de M3: -15.000000

Soluções do sistema:
x1 = 3.000000    (x1 = det(M1) / det(A))
x2 = 2.000000    (x2 = det(M2) / det(A))
x3 = -5.000000           (x3 = det(M3) / det(A))
```

In [ ]: