

Introdução à Teoria de Pontos Fixos e Aplicações

Doherty Andrade¹ 

Maringá, 2001 / Revisão 2024

¹Universidade Estadual de Maringá (UEM)
doherty@uem.br

Prólogo

Estas notas foram especialmente elaboradas para servirem de texto para o mini-curso de introdução à teoria de pontos fixos e aplicações do VIII ERMAC e XIII SEMAT realizados na Universidade Estadual de Maringá (UEM) em 2001.

O nosso objetivo neste minicurso era apresentar algumas ferramentas da teoria dos pontos fixos e dar aplicações, além de motivar estudantes para o estudo deste importante ramo da Matemática. Apresentamos e demonstramos alguns teoremas de ponto fixo, tais como o teorema de ponto fixo das contrações, o teorema do ponto fixo de Schauder e o teorema do ponto fixo de Caristi e, também, procuramos ilustrar os resultados com aplicações simples às equações diferenciais. Para alcançar estes objetivos tivemos que introduzir os conceitos de espaços métricos, espaço métrico completo, sequências de Cauchy, contrações, conjuntos compactos, continuidade, diferenciabilidade e teorema de existência de soluções de EDO's. Acho que exageramos em alguns aspectos naquela época, mas sobrevivemos.

Na época nós usamos o software Maple para escrever procedimentos para pontos fixos de exemplos os simples aqui apresentados em aplicações às EDO's de primeira e segunda ordens. Nesta atualização nós incluímos os códigos em Python, mais atual e de graça. Por completa falta de tempo pouca coisa foi modificada desde a primeira versão, apesar do tempo acredito que ainda é um bom texto para iniciar no tema ponto fixo.

Espero que este material seja útil. Boa leitura e bons estudos!

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Resultados Elementares	1
1.2	Conjuntos Especiais	3
1.3	Espaços Topológicos	7
1.4	Funções Contínuas em Espaços Topológicos	9
1.5	Funções Contínuas em Espaços Métricos	12
1.6	Aplicações Abertas e Fechadas	15
2	Alguns Espaços Topológicos	17
2.1	Espaços de Hausdorff	22
2.2	Espaços Compactos	24
2.3	Compactos de um Espaço Métrico	27
2.4	Espaços Métricos Completos	29
2.5	Completamento de Espaço Métrico	30
3	Teoremas de Ponto Fixo	35
3.1	Introdução	35
3.2	Princípio da Contração	36
3.3	Exemplos Simples	38
3.4	Outros Teoremas de Ponto Fixo	39
3.5	O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer	44
3.6	Ponto Fixo de Caristi	46
3.7	Espaços de Banach	49
4	Introdução às EDO's	53
4.1	Introdução	53

4.2	O Teorema de Existência	55
4.3	Um exemplo numérico	57
4.4	Outras Propriedades	58
4.5	Equações Diferenciais de Ordem 2	62
A	Códigos em Python	69
A.1	Códigos em Python dos exemplos	69
A.1.1	Método do Ponto Fixo (Capítulo 3)	70
A.1.2	Processo Iterativo de Picard (Capítulo 4)	71
A.1.3	EDO de Segunda Ordem via Ponto Fixo (Ca- pítulo 4)	74
A.1.4	EDO de Segunda Ordem: Exemplo Adicional	77
A.2	Observações sobre os Códigos	78

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo vamos ver alguns conceitos elementares que serão úteis no restante da teoria.

1.1 Resultados Elementares

Um espaço métrico é um par (M, d) , onde M é um conjunto não vazio e d uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ que para todos os pontos x e y de M satisfaz:

- a) $d(x, y) \geq 0$ (positiva)
- b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (não degenerada)
- c) $d(x, y) = d(y, x)$ (simétrica)
- d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdade triangular)

A função d é chamada uma métrica e $d(x, y)$ significa a distância entre x e y .

O espaço métrico que temos de imediato e mais interessante é o $\mathbb{R}^n$, cuja métrica $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = \|x - y\|$. Esta é, por razões óbvias, chamada métrica euclidiana.

Em geral, num espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$, definimos $d : X \times$

$X \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

temos que (X, d) é um espaço métrico.

Sejam (M, d) um espaço métrico, S um subconjunto não vazio de M e $x_0 \in M$. Definimos a distância entre x_0 e S por $d(x_0, S) = \inf_{x \in S} d(x_0, x)$.

É claro que $d(x_0, S)$ é sempre não-negativo, pois $\{d(x_0, x); x \in S\}$ é limitado inferiormente por 0.

Teorema 1.1. *Sejam (M, d) um espaço métrico, S um subconjunto não vazio de M e $x_0 \in M$. Então, $d(x_0, S) = 0$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ dado existe um $x \in S$ tal que $d(x_0, x) < \varepsilon$.*

Demonstração. Seja $D = \{d(x_0, x); x \in S\}$. Como $d(x_0, x) \geq 0$ para todo $x \in S$, então 0 é um limite inferior para D . Logo, $d(x_0, S) = 0$ é equivalente a: nenhum $\varepsilon > 0$ é limite inferior para D , isto é,

$$\nexists \varepsilon \forall x [\varepsilon > 0, x \in S \implies d(x_0, x) \geq \varepsilon].$$

Mas isto é equivalente a

$$\forall \varepsilon \exists x [\varepsilon > 0, x \in S \implies d(x_0, x) < \varepsilon]$$

como afirmado. □

Observe que o teorema não afirma que $d(x_0, S) = 0$ implica que $x_0 \in S$. Veja os exemplos.

- a) Tome em $\mathbb{R}^1$ o subconjunto $S = (0, 1)$ e $x_0 = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $x \in S$ tal que $x > 1 - \varepsilon$. Como $1 - \varepsilon < 1$, $d(1, x) < \varepsilon$. Segue do teorema que $d(1, S) = 0$, mas $1 = x \notin S$.
- b) Considere o ponto $x_0 = 0$ e $S = \{1/n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/\varepsilon$, pois $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. Segue que

$$d(0, 1/n) = 1/n < \varepsilon$$

e portanto temos que $d(0, S) = 0$.

1.2 Conjuntos Especiais

Seja S um conjunto num espaço métrico (M, d) . Um ponto da fronteira do conjunto S é um ponto $x_0 \in M$ tal que:

- i) $d(x_0, S) = 0$,
- ii) $d(x_0, S^c) = 0$, onde S^c denota o complementar de S .

A fronteira de um conjunto é o conjunto formado pelos seus pontos de fronteira, é denotado por ∂S . Note que um ponto de fronteira de um conjunto S não precisa estar em S . Segue da definição que S e S^c , o complementar de S , têm mesma fronteira, isto é, $\partial S = \partial S^c$.

Note que a fronteira do espaço M é sempre vazia.

A bola aberta B com centro x_0 e raio $r > 0$ num espaço métrico (M, d) é definida por $B(x_0, r) = \{x \in M; d(x_0, x) < r\}$.

A “forma” da bola depende evidentemente da métrica. Desenhe as bolas para as seguintes métricas do $\mathbb{R}^2$:

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

$$d(x, y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\},$$

$$d(x, y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

onde $x = (x_1, y_1)$ e $y = (x_2, y_2)$.

Teorema 1.2. *Seja S um conjunto num espaço métrico (M, d) e x_0 um ponto em M . O ponto $x_0 \in \partial S$ se, e somente se, toda bola de centro x_0 contém pontos de S e de S^c .*

Demonstração. Se toda bola de centro x_0 e raio $r > 0$ contém pontos de S e do complementar de S , então para todo $r > 0$ existe $x \in S$ e $y \in S^c$ tal que $d(x_0, x) < r$ e $d(x_0, y) < r$.

Usando o teorema 1.1 temos que $d(x_0, S) = 0$ e $d(x_0, S^c) = 0$, isto é, x_0 está na fronteira de S e na fronteira de S^c . A recíproca é imediata. $\square$

Definição 1.3. Um conjunto S num espaço métrico (M, d) é **aberto** se ele não contém pontos da sua fronteira, isto é, $\partial S \subset S^c$.

Um conjunto é **fechado** se ele contém todos os seus pontos de fronteira, isto é, $\partial S \subset S$.

Teorema 1.4. *Um conjunto S num espaço métrico (M, d) é aberto se, e somente se, o seu complementar é fechado.*

Demonstração. Se S é aberto, então sua fronteira está contida no complementar de S , isto é, S^c é fechado. Por outro lado, se o complementar é fechado, então ele contém a fronteira de S e pela definição segue que S é aberto. $\square$

Teorema 1.5. *Um conjunto S num espaço métrico (M, d) é fechado se, e somente se, para cada $x \in M$, $d(x, S) = 0 \implies x \in S$.*

Demonstração. Suponha que $d(x, S) = 0 \implies x \in S$. Se y é um ponto da fronteira de S , então $d(y, S) = 0$ e $d(y, S^c) = 0$. Como $d(y, S) = 0$ segue que $y \in S$. Assim S contém seus pontos de fronteira e é fechado.

Suponha que S é fechado. Se $x \notin S$, então $x \in S^c$ e portanto $d(x, S^c) = 0$. Se $d(x, S) = 0$, então $x \in \partial S$ e como S é fechado segue que $x \in S$. Isto é uma contradição. Logo, $x \notin S \implies d(x, S) \neq 0$, isto é, $d(x, S) = 0 \implies x \in S$. $\square$

Teorema 1.6. *Um conjunto X num espaço métrico (M, d) é aberto se, e somente se, cada ponto $x \in X$ é centro de uma bola aberta B inteiramente contida em X .*

Demonstração. Se cada $x \in X$ é centro de uma bola aberta B inteiramente contida em X , então x não pode ser ponto de fronteira de X porque B não contém pontos de X^c . Segue que X não contém pontos de sua fronteira e portanto é aberto.

Suponha agora que X seja aberto e tome $x \in X$. Toda bola aberta B com centro x contém então um ponto de X . Como x não é um ponto de fronteira de X , segue do teorema 1.2 que pelo menos uma bola aberta B com centro x não contém ponto de X^c , isto é, $B \subset X$. $\square$

Num espaço métrico, podemos tomar a coleção de todos os conjuntos abertos $\mathcal{A}$. A coleção $\mathcal{A}$ possui uma estrutura, quase independente da métrica do espaço, caracterizada pelo teorema:

Teorema 1.7. *Num espaço métrico (M, d) :*

- i) os conjuntos $\emptyset$ e M estão em $\mathcal{A}$, isto é, são abertos.*
- ii) a união S de qualquer coleção de conjuntos abertos é conjunto aberto.*
- iii) a interseção I de toda coleção finita de conjuntos abertos é aberto.*

Demonstração. i) O conjunto $\emptyset$ é aberto porque $\partial\emptyset = \emptyset \subset \emptyset^c = M$. O conjunto M é aberto porque $\partial M = \emptyset \subset M^c = \emptyset$.

ii) Seja $m \in S$. Vamos mostrar que S é aberto encontrando uma bola aberta B de centro m tal que $B \subset S$. Como $m \in S$, então m está em algum elemento U da coleção. Como U é aberto podemos encontrar uma bola aberta B de centro m inteiramente contida em U . Como $U \subset S$ segue que $B \subset S$ e assim S é aberto.

iii) Seja $m \in I$ vamos provar que I é aberto exibindo uma bola aberta B de centro m inteiramente contida em I . Seja (U_i) , $i = 1, \dots, n$ a coleção finita de abertos. Como $m \in U_i$ para cada i , então podemos encontrar uma bola aberta $B(m, r_i)$ tal que $B(m, r_i) \subset U_i$. Seja $r = \min\{r_i; i = 1, \dots, n\}$. Segue que $B(m, r) \subset U_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, e assim $B(m, r) \subset I$. Isto mostra que I é aberto.

□

Observação 1.8. O teorema 1.7 descreve de certa forma uma estrutura particular no conjunto dos abertos de um espaço métrico. Esta estrutura é a mais importante do assunto que estamos tratando.

Teorema 1.9. *Num espaço métrico (M, d) um subconjunto X é aberto se, e somente se, é reunião de bolas abertas.*

Demonstração. É claro que qualquer reunião de bolas abertas é um conjunto aberto em virtude do teorema acima. Segue que se $X = \cup B_\lambda$, onde B_λ é bola aberta, então X é conjunto aberto. Se X é um conjunto aberto, então para cada $x \in X$ existe uma bola aberta B_x

centrada em x inteiramente contida em X . Logo, $\{x\} \subset B_x \subset X$. Logo, tomando a reunião temos

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup B_x \subset X.$$

□

Em relação à coleção de todos os subconjuntos fechados temos uma estrutura similar à da coleção dos abertos dada pelo teorema 1.7.

Teorema 1.10. *Num espaço métrico (M, d) valem as seguintes propriedades:*

- i) *Os conjuntos $\emptyset$ e M são fechados,*
- ii) *A interseção de qualquer coleção (F_α) , $\alpha \in I$ de fechados é um conjunto fechado,*
- iii) *A reunião de qualquer coleção finita $\{F_1, \dots, F_n\}$ de conjuntos fechados é fechado.*

Demonstração. i) Os conjuntos $\emptyset$ e M são fechados pois seus complementares são abertos.

ii) O conjunto interseção é fechado porque o seu complementar

$$M - \left(\bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha} (M - F_{\alpha})$$

é aberto pelo teorema 1.7.

iii) O conjunto reunião é fechado porque o seu complementar

$$M - \left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right) = \bigcap_{i=1}^n (M - F_i)$$

é aberto pelo teorema 1.7.

□

1.3 Espaços Topológicos

O conceito de espaço topológico surgiu do estudo da reta $\mathbb{R}$, espaços euclidianos e do estudo das funções contínuas sobre estes espaços.

Vimos que a reunião de uma coleção arbitrária de conjuntos abertos num espaço métrico é um conjunto aberto, e que a intersecção de uma coleção finita de abertos num espaço métrico é um conjunto aberto. Isto sugere a seguinte noção.

Definição 1.11. Uma **topologia** sobre um conjunto X é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tendo as seguintes propriedades:

- i) $\emptyset$ e X estão em $\mathcal{T}$
- ii) a união de elementos de qualquer subcoleção de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$
- iii) a intersecção de elementos de qualquer subcoleção finita de $\mathcal{T}$ está em $\mathcal{T}$.

O par $(X, \mathcal{T})$ é chamado de espaço topológico.

Se $\mathcal{T}$ é uma topologia em X e $U \in \mathcal{T}$ então U é chamado de conjunto aberto em X .

Exemplo 1.12. i) Um espaço métrico (M, d) é um espaço topológico. A topologia de M é a topologia

$$\tau = \{A \subseteq M; A \text{ é aberto de } M\},$$

onde o termo aberto está dado na definição 1.3. Esta estrutura é chamada de topologia gerada pela métrica de (M, d) .

- ii) Seja $X = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$, todos os subconjuntos de X . Segue que $(X, \mathcal{T}_0)$ é espaço topológico.

Se $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ então $(X, \mathcal{T}_1)$ também é espaço topológico.

A topologia $\mathcal{T}_0$ é chamada de topologia discreta e a topologia $\mathcal{T}_1$ é chamada topologia trivial, ou indiscreta ou caótica.

- iii) Seja X um conjunto e τ_f a coleção de todas os subconjuntos U de X tais que $X - U$ é finito ou é todo X . Então τ_f é uma topologia sobre X chamada a topologia do complemento

finito. É claro que X e $\emptyset$ estão em τ_f . Se $\{U_\alpha\}$ é uma coleção de elementos de τ_f então $\cup_\alpha U_\alpha$ está em τ_f , pois

$$X - \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcap_\alpha (X - U_\alpha).$$

A interseção é finita ou todo o X pois cada $X - U_\alpha$ é finito ou todo o X . Se $U_1, U_2, \dots, U_n$ estão em τ_f , então como

$$X - \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (X - U_i)$$

e a união é finita ou todo o conjunto X pois cada conjunto é finito ou o conjunto X .

- iv) Seja X um conjunto e τ_c a coleção de todos os subconjuntos U de X tal que $X - U$ é enumerável ou todo o X . Então, τ_c é uma topologia sobre X . De fato, é claro que X e $\emptyset$ estão em τ_c . Se $\{U_\alpha\}_\alpha$ é uma coleção de elementos de τ_c então

$$X - \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcap_\alpha (X - U_\alpha).$$

Como cada $(X - U_\alpha)$ é enumerável ou todo X , então a interseção é enumerável ou é todo X (lembre que subconjunto de conjunto enumerável é enumerável).

Se $U_1, U_2, \dots, U_n$ estão em τ_c , então

$$X - \bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n (X - U_i)$$

é enumerável ou X (lembre que reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável). Esta é a topologia do complemento enumerável.

Definição 1.13. Sejam τ e τ' topologias de X . Se $\tau' \supset \tau$, então dizemos que τ' é mais fina que τ . Também dizemos que τ' é maior do que τ .

Duas topologias sobre um conjunto X não precisam ser comparáveis.

Mostramos no teorema 1.9 que num espaço métrico, todo aberto é reunião de bolas abertas. Isto mostra que os abertos de um espaço

métrico são construídos usando alguns abertos especiais. Nos exemplos, descrevemos a topologia dizendo como são os seus abertos. Em geral isto não é possível ser feito. Em muitos casos especificamos uma coleção menor de subconjuntos de X e definimos a topologia em termos dela. A ideia de construir conjuntos abertos usando alguns abertos especiais é ideia de base.

Definição 1.14. Seja X um conjunto. Uma **base** para uma topologia sobre X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X , chamados de elementos básicos, tais que

- i) para cada $x \in X$, existe um elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
- ii) Se $x \in (B_1 \cap B_2)$, onde $B_i \in \mathcal{B}$, então existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3$ e $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Se $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia sobre X , a topologia τ gerada por $\mathcal{B}$ é descrita como segue: $U \in \tau$ se para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset U$.

Note que cada $B \in \mathcal{B}$ é um aberto sob esta definição e assim $\mathcal{B} \subset \tau$.

Proposição 1.15. *A coleção τ construída acima é de fato uma topologia.*

1.4 Funções Contínuas em Espaços Topológicos

O conceito de função contínua é fundamental em Matemática. Nesta seção vamos formular uma definição de continuidade que, embora envolva apenas a noção de conjunto aberto, engloba a noção de continuidade na reta real como caso especial. Vamos estudar várias propriedades das funções contínuas e veremos que muitas delas são generalizações dos resultados aprendidos no Cálculo e Análise.

Definição 1.16. Sejam (X, τ) e (Y, τ') espaços topológicos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita **contínua** se para cada aberto V de Y , o subconjunto $f^{-1}(V)$ é aberto de X .

Note que a noção de continuidade envolve apenas o conceito de conjunto aberto, assim continuidade é um conceito puramente topológico.

Observamos que se a topologia τ' de Y é dada por uma base $\mathcal{B}'$, então para provar a continuidade de f basta provar que $f^{-1}(B')$ é aberto para todo B' aberto básico. De fato, dado um aberto arbitrário V de Y existem abertos básicos B_α tais que $V = \cup_{\alpha \in I} B_\alpha$. Então,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$$

é aberto desde que $f^{-1}(B_\alpha)$ seja aberto.

Teorema 1.17. *Sejam (X, τ) e (Y, τ') espaços topológicos. São equivalentes:*

- i) f é contínua,
- ii) para todo $A \subset X$, tem-se $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$,
- iii) para todo B fechado em Y , o conjunto $f^{-1}(B)$ é fechado em X .

Demonstração. i) $\implies$ ii): suponha que f seja contínua e seja $A \subset X$. Provaremos que se $x \in \overline{A}$ então $f(x) \in \overline{f(A)}$. Tome V um aberto de Y contendo $f(x)$. Então $f^{-1}(V)$ é aberto de X e contém x e tem algum ponto $y \in f^{-1}(V) \cap A$. Segue que $\emptyset \neq V \cap f(A) \ni f(y)$. Portanto $f(x) \in \overline{f(A)}$.

Para provar que ii) $\implies$ iii), seja B fechado de Y e $A = f^{-1}(B)$. Provaremos que A é fechado em X , isto é, $\overline{A} \subset A$. Seja $x \in \overline{A}$, então $f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$, assim $x \in f^{-1}(B) = A$. Segue que $\overline{A} \subset A$.

Finalmente provaremos que iii) $\implies$ i). Seja V um aberto em Y e $B = Y - V$. Então B é fechado em Y e portanto $f^{-1}(B)$ é fechado em X . Mas, $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = X - f^{-1}(B)$, assim $f^{-1}(V)$ é aberto.

□

Definição 1.18. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função bijetora. Dizemos que f é um **homeomorfismo** se f e f^{-1} são contínuas.

1.4. FUNÇÕES CONTÍNUAS EM ESPAÇOS TOPOLÓGICOS 11

Admitindo f contínua então $f^{-1}(A)$ é aberto desde que A seja aberto. Admitindo f^{-1} contínua então $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ é aberto desde que A seja aberto. Assim, outra maneira de definir homeomorfismo é dizer que f é uma bijeção tal que $f(A)$ é aberto se, e somente se, A é aberto.

Teorema 1.19 (Construção de funções contínuas). *Seja X, Y e Z espaços topológicos.*

- a) *Se $f : X \rightarrow Y$ é função constante, então f é contínua.*
- b) *Se A é subespaço de X , então a inclusão $j : A \rightarrow X$ é contínua.*
- c) *Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são contínuas, então $g \circ f$ é contínua.*
- d) *Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e A é subespaço de X , então a restrição $f|_A : A \rightarrow Y$ é contínua.*

Demonstração. a) Suponha $f(x) \equiv a \in Y$. Se V é um aberto de Y , então $f^{-1}(V)$ é igual a X ou igual ao conjunto vazio, conforme $a \in V$ ou não. Em qualquer caso $f^{-1}(V)$ é aberto.

- b) Dado aberto U em X , então $j^{-1}(U) = U \cap A$, que é aberto em A .
- c) Dado aberto W em Z , então $g^{-1}(W)$ é aberto em Y e $f^{-1}(g^{-1}(W))$ é aberto em X . Mas $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$. Logo, $(g \circ f)^{-1}(W)$ é aberto em X e assim $(g \circ f)$ é contínua.
- d) Finalmente para provar d) basta notar que $f|_A$ é igual à composta da inclusão $j : A \rightarrow X$ com $f : X \rightarrow Y$ e portanto $f|_A$ é contínua.

□

Teorema 1.20. *Sejam $X = A \cup B$, $f : A \rightarrow Y$ e $g : B \rightarrow Y$ contínuas tais que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in (A \cap B)$. Então é contínua a função $h : X \rightarrow Y$ dada por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $F \subset Y$ fechado. Como $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$ e $f^{-1}(F)$ e $g^{-1}(F)$ são fechados, então $h^{-1}(F)$ o é e assim h é contínua. $\square$

Teorema 1.21. *Seja $f : Z \rightarrow X \times Y$ dada por $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$. Então, f é contínua se, e somente se, f_1 e f_2 são contínuas.*

Demonstração. Sejam $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ e $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ as projeções. Claramente π_1 e π_2 são contínuas, pois $\pi_1^{-1}(V) = V \times Y$ e $\pi_2^{-1}(W) = X \times W$, para V e W abertos. Como $f_1 = \pi_1 \circ f$ e $f_2 = \pi_2 \circ f$ são composta de funções contínuas, então f_1 e f_2 são contínuas.

Por outro lado, se f_1 e f_2 são contínuas, seja $V \times W$ um aberto básico de $X \times Y$. Então, $f^{-1}(V \times W) = f_1^{-1}(V) \cap f_2^{-1}(W)$. Como cada um dos conjuntos desta interseção é aberto segue que $f^{-1}(V \times W)$ é aberto. $\square$

1.5 Funções Contínuas em Espaços Métricos

Nesta seção veremos alguns resultados elementares sobre funções contínuas definidas em espaços métricos e provaremos que a definição de continuidade do cálculo é equivalente àquela dada para funções definidas em espaços topológicos.

Teorema 1.22. *Sejam (X, d_1) e (Y, d_2) espaços métricos. A função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para todo $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_1(x, y) < \delta$ implica $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Demonstração. Primeiramente suponhamos f contínua e sejam dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ é aberto de X e contém x . Logo, contém alguma bola $B(x, \delta)$ centrada em x . Se $y \in B(x, \delta)$ então $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$. Isto é, $d_1(x, y) < \delta$ implica que $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Suponha agora que a condição seja satisfeita. Tomemos um aberto V de Y e $x \in f^{-1}(V)$. Como $f(x) \in V$ existe $B(f(x), \varepsilon) \subset V$. Logo, pela hipótese, existe $B(x, \delta)$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Segue que $f^{-1}(V)$ é aberto em X . $\square$

Exemplo 1.23. Se (M_1, d_1) e (M_2, d_2) são dois espaços métricos podemos introduzir pelo menos duas métricas em $M_1 \times M_2$. São elas dadas por se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são elementos de $M_1 \times M_2$:

$$d(x, y) = \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2}$$

$$m(x, y) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}.$$

Estas métricas geram a mesma topologia em $M_1 \times M_2$ que tornam as projeções $\pi_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ dadas por $\pi_1(x_1, y_1) = x_1$ e $\pi_2(x_1, y_1) = y_1$, contínuas.

Uma sequência em um espaço topológico é uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow X$. Denotamos $s(n)$ por x_n e escrevemos (x_n) ou $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ para representar s .

Dizemos que a sequência (x_n) de elementos de X converge para $x \in X$, se para todo aberto U contendo x existe um natural n_0 tal que $x_n \in U$, $\forall n \geq n_0$. Escrevemos $x_n \rightarrow x$ para representar que (x_n) converge para x .

Lema 1.24. *Seja (X, d) espaço métrico e $A \subset X$. Se existe sequência (x_n) de pontos de A convergindo para x , então $x \in \overline{A}$.*

Demonstração. Seja (x_n) sequência de pontos de A tal que $x_n \rightarrow x$. Então, todo aberto U contendo x contém pontos de A e assim $x \in \overline{A}$. Suponha que $x \in \overline{A}$, então para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$. Provaremos que (x_n) converge para x . Dado um aberto U contendo x existe $B(x, \varepsilon) \subset U$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$, então $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. $\square$

Note que apenas na prova da recíproca utilizamos o fato de X ser métrico.

Teorema 1.25. *Sejam (X, d) espaço métrico, Y espaço topológico e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Então, f é contínua se, e somente se, para toda sequência convergente $x_n \rightarrow x$ em X tem-se $f(x_n) \rightarrow f(x)$.*

Demonstração. Primeiramente assuma que f seja contínua. Dado $x_n \rightarrow x$ e V aberto contendo $f(x)$, então $f^{-1}(V)$ é aberto contendo x e assim existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in f^{-1}(V)$, $\forall n \geq n_0$. Segue que $f(x_n) \in V$, $\forall n \geq n_0$ e assim $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Reciprocamente, seja $A \subset X$ e $x \in \overline{A}$. Então, existe (x_n) sequência de pontos de A convergindo para x . Por hipótese, a sequência $f(x_n)$ converge para $f(x)$. Como $f(x_n) \in f(A)$, o lema anterior assegura que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Logo, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ e f é contínua. $\square$

Lema 1.26. *As operações adição, subtração e multiplicação são funções contínuas de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. A operação de divisão é função contínua de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$ em $\mathbb{R}$.*

Teorema 1.27. *Seja X espaço topológico e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Então, $(f \pm g)$ e $(f \cdot g)$ são contínuas. Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então (f/g) é contínua.*

Demonstração. Como $(f + g)$ é a composta de $h : X \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dada por $h(x) = (f(x), g(x))$, com a adição $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e ambas são contínuas segue que $(f + g)$ é contínua. Argumento análogo para as outras funções. $\square$

Definição 1.28. Sejam (Y, d) um espaço métrico e X um conjunto. Dizemos que a sequência de funções $f_n : X \rightarrow Y$ converge **uniformemente** para $f : X \rightarrow Y$ se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \quad \forall x \in X, \quad \forall n \geq n_0.$$

O conceito de convergência uniforme de sequência de funções é importante e o seguinte teorema afirma que o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua.

Teorema 1.29 (Limite uniforme). *Sejam X espaço topológico, (Y, d) espaço métrico e $f_n : X \rightarrow Y$ uma sequência de funções contínuas. Se f_n converge uniformemente para $f : X \rightarrow Y$, então f é contínua.*

Demonstração. Provaremos que $f^{-1}(V)$ é aberto se V é aberto. Seja V aberto de Y e $x_0 \in f^{-1}(V)$. Seja $y_0 = f(x_0)$ e $\varepsilon > 0$ tal que $B(y_0, \varepsilon) \subset V$. Então, pela convergência uniforme, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/4, \quad \forall x \in X, \quad \forall n \geq n_0.$$

Como f_{n_0} é contínua, existe um aberto U contendo x_0 tal que $f_{n_0}(U) \subset B(f_{n_0}(x_0), \varepsilon/2)$. Provaremos que $f(U) \subset B(y_0, \varepsilon)$. De

fato, seja $x \in U$, então

$$d(f(x), f_{n_0}(x)) < \varepsilon/4 \text{ (pela escolha de } n_0),$$

$$d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \varepsilon/2 \text{ (pela escolha de } U),$$

$$d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \varepsilon/4 \text{ (pela escolha de } n_0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &\leq d(f(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x), f(x_0)) \\ &\leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $f(x) \in B(y_0, \varepsilon)$. □

1.6 Aplicações Abertas e Fechadas

Já vimos que as projeções levam abertos em abertos. Mas existem funções que não tem esta propriedade, é o caso da função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ constante.

Definição 1.30. Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é **aberta** se para cada $A \subset X$ aberto, $f(A) \subset Y$ é aberto. Dizemos que f é **fechada** se para cada $B \subset X$ fechado, $f(B) \subset Y$ é também fechado.

Exemplo 1.31. a) Sejam (X, τ) e (X, σ) espaços topológicos onde $\tau \neq \sigma$ mas $\tau \subset \sigma$. Então, a aplicação identidade $i : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ é bijeção, fechada, aberta e não contínua.

b) Seja $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x < 1/2 \\ 2(x - 1/2), & \text{se } 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

É aberta, fechada e não é contínua.

Embora a definição de aplicação aberta e fechada não exijam continuidade das funções, estamos interessados em resultados que combinem estes conceitos.

Teorema 1.32. *a) Uma bijeção contínua $f : X \rightarrow Y$ é homeomorfismo se, e somente se, f é aberta.*

b) Uma bijeção contínua $g : X \rightarrow Y$ é homeomorfismo se, e somente se, g é fechada.

Demonstração. Como f é bijeção, então f é homeomorfismo se, e somente se, f^{-1} é contínua e isto ocorre se, e somente se, f é aberta. O caso b) é análogo. $\square$

Definição 1.33. Uma aplicação contínua $g : X \rightarrow Y$ é **homeomorfismo local** se para cada $x \in X$ existem abertos $V \subset X$ e $U \subset Y$ tais que $x \in V$ e $g(x) \in U$ e $g|_V : V \rightarrow U$ é homeomorfismo.

O seguinte teorema relaciona homeomorfismo local como aplicação aberta.

Teorema 1.34. *Todo homeomorfismo local é uma aplicação aberta.*

Demonstração. Seja $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo local. Para cada $x \in X$ selecione $V_x \subset X$ e $U_x \subset Y$ como na definição. Então, $\bigcup_{x \in X} V_x = X$ e $f|_{V_x} : V_x \rightarrow U_x$ é homeomorfismo. Se $V \subset V_x$ é aberto, então $f(V)$ é aberto de U_x e portanto aberto de Y . Seja W um aberto qualquer de X , então

$$W = W \cap X = W \cap \left(\bigcup_{x \in X} V_x \right) = \bigcup_{x \in X} (W \cap V_x).$$

Cada $W \cap V_x$ é aberto de X e portanto aberto de V_x . Sendo $f|_{V_x} : V_x \rightarrow U_x$ homeomorfismo, concluímos que $f(W \cap V_x)$ é aberto de Y para cada $x \in X$. Logo,

$$f(W) = f \left(\bigcup_{x \in X} [W \cap V_x] \right) = \bigcup_{x \in X} f(W \cap V_x)$$

é aberto em Y . $\square$

Capítulo 2

Alguns Espaços Topológicos

Uma separação ou cisão para um espaço topológico X é um par A, B de subconjuntos abertos disjuntos e não vazios tal que $X = A \cup B$. Note que neste caso A e B são abertos e fechados em X .

Um espaço topológico é chamado **conexo** se ele não é a união de dois subespaços não vazios disjuntos e abertos. Em outras palavras, o espaço não admite uma separação.

O próximo resultado, embora simples, é de interesse pois em muitos casos a conexidade de espaços mais complicados é deduzida da conexidade dos intervalos.

Teorema 2.1. *Um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é sempre conexo.*

Demonstração. Esta demonstração vale para qualquer intervalo. Suponha $I = A \cup B$ com $A \cap B = \emptyset$ e ambos não vazios e abertos no subespaço topológico $I \subset \mathbb{R}$. Tomemos $a \in A$ e $b \in B$, podemos assumir que $a < b$. Seja $s = \inf\{x \in B; a < x\}$. Então, pela definição de ínfimo, toda vizinhança de s contém pontos de B ; mas também pontos de A , pois se $s \neq a$ então $a < s$ e $(a, s) \subset A$. Assim, s não pode ser ponto de A e nem de B o que é uma contradição, pois $s \in A \cup B$ e ambos são abertos. $\square$

A recíproca do teorema anterior é verdadeira.

Teorema 2.2. *Todo subconjunto conexo S de $\mathbb{R}$ é um intervalo.*

Demonstração. Se S não fosse intervalo, existiriam $x, y \in S$ e $z \notin S$ tais que $x < z < y$. Segue que $(-\infty, z) \cap S$ e $(z, \infty) \cap S$ são abertos em S , disjuntos e não vazios. Logo, S é desconexo. $\square$

Teorema 2.3. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos. Se X é conexo, então $Z = f(X)$ é conexo.*

Demonstração. Restringindo f a sua imagem, então $f : X \rightarrow Z$ é contínua e sobrejetor. Suponhamos que $Z = A \cup B$, onde A e B são dois abertos disjuntos e não vazios em Z . Segue que $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos disjuntos não vazios e a união é X . Uma contradição, pois X é conexo. $\square$

Uma consequência imediata é o seguinte corolário.

Corolário 2.4. *Seja X espaço topológico conexo e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Então, $f(X)$ é um intervalo.*

Segue imediatamente deste corolário que se f assume os valores $f(x_0)$ e $f(y_0)$, então f assume todos os valores reais entre eles.

Proposição 2.5. *Seja $A \cup B$ uma separação para o espaço topológico X . Se Y é um subconjunto conexo de X , então Y está inteiramente contido em A ou B .*

Demonstração. Como A e B são abertos, então $C = A \cap Y$ e $D = B \cap Y$ são abertos em Y . Os conjuntos C e D são disjuntos e $C \cup D = Y$. Como Y é conexo, pelo menos um deles é vazio e portanto Y está inteiramente contido em A ou B . $\square$

Teorema 2.6. *Seja $\{A_\lambda\}$ uma coleção de conjuntos conexos tendo um ponto p em comum. Então, $Y = \cup_\lambda A_\lambda$ é conexo.*

Demonstração. Se $A \cup B = Y$ é uma separação, então p pertence a um dos conjuntos A ou B . Suponha $p \in A$. Como cada conjunto A_λ é conexo e contém p , então está contido inteiramente em A . Portanto, $\cup_\lambda A_\lambda \subseteq A$. Contradizendo o fato de B ser não vazio. $\square$

Como aplicação deste teorema provaremos o seguinte:

Teorema 2.7. *O produto cartesiano arbitrário de conjuntos conexos é conexo.*

Demonstração. Provaremos o resultado para uma quantidade enumerável. Seja $\{A_n\}$ uma coleção enumerável de conjuntos conexos e $X = \prod_n A_n$. A prova é por indução. Se A_1 e A_2 são conexos fixemos o ponto $(a, b) \in A_1 \times A_2$. São conexos os conjuntos $\{x\} \times A_2$ e $A_1 \times \{b\}$, pois são homeomorfos a A_2 e a A_1 , respectivamente, onde $x \in A_1$. Além disso, como $\{x\} \times A_2$ e $A_1 \times \{b\}$ têm o ponto (x, b) em comum, então $X_x = (A_1 \times \{b\}) \cup (\{x\} \times A_2)$ é conexo. Observamos que X_x contém o ponto (a, b) para todo $x \in A_1$. Tomando a união $\cup_{x \in A_1} X_x$ temos que este conjunto é conexo pois os conjuntos conexos têm o ponto (a, b) em comum. A prova para qualquer número finito é feita por indução e usando que $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é homeomorfo a $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) \times A_n$. Os detalhes ficam como exercício. $\square$

Definição 2.8. Dados dois pontos x, y num espaço topológico X , um **caminho** em X , ligando x a y , é qualquer função contínua $f : [a, b] \rightarrow X$ tal que $f(a) = x$ e $f(b) = y$, para algum intervalo fechado $[a, b]$.

O seguinte teorema dá uma classe ampla de conjuntos conexos.

Teorema 2.9. *Seja X um espaço topológico com a seguinte propriedade: para quaisquer dois pontos x e y de X existe uma função $f : [0, 1] \rightarrow X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Então, X é conexo.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ subconjunto não vazio, aberto e fechado. Tome $x \in A$ e $y \in X$. Então existe uma função $f : [0, 1] \rightarrow X$ contínua tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Como A é aberto, então $f^{-1}(A) \subset [0, 1]$ é aberto, fechado e não vazio ($0 \in f^{-1}(A)$). Como $[0, 1]$ é conexo, então $f^{-1}(A) = [0, 1]$ e portanto $f(1) = y \in A$. Como $y \in X$ é qualquer, segue que $A = X$. $\square$

Um espaço topológico com a propriedade acima recebe um nome especial. Um espaço X é **conexo por caminhos** se dois pontos quaisquer de X podem ser ligados por um caminho em X .

O teorema acima diz que todo espaço conexo por caminhos é conexo. Esta é a relação mais evidente entre os conceitos de conexidade e conexidade por caminhos.

A recíproca do teorema 2.9 não é verdadeira. No seguinte exemplo apresentamos um espaço conexo que não é conexo por caminhos. Mas antes precisamos de um resultado.

Teorema 2.10. *Seja $A \subset X$ conexo. Se $\overline{A} = X$, então X é conexo.*

Demonstração. Seja $B \neq \emptyset$ subconjunto aberto e fechado de X . Como $\overline{A} = X$ e B é aberto segue que $A \cap B \neq \emptyset$. Como A é conexo, segue da proposição 2.5 que $A \subset B$. Logo, $X = \overline{A} \subset B$, pois B é fechado. Portanto, $X = B$. $\square$

Corolário 2.11. *Sejam A e B subconjuntos de um espaço X . Se A é conexo e $A \subset B \subset \overline{A}$. Então, B é conexo.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema com $X = B$. Em B , com a topologia induzida de X , temos $\overline{A} = B$ e agora aplicar o teorema. $\square$

Exemplo 2.12 (O Pente sem a origem). O seguinte conjunto é chamado de “pente” sem a origem. Seja

$$P_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (0 < y < 1 \text{ e } x = 1/n, n \in \mathbb{N}) \text{ ou } (y = 0 \text{ e } 0 < x \leq 1)\}.$$

Note que $(0, 0)$ não pertence ao conjunto P_0 . O conjunto pode ser escrito como união do segmento vertical inicial S com o seu complementar T . É fácil ver que estes são conexos por caminho e portanto conexos. Além disso, temos $\overline{T} = P_0$. Segue do teorema que P_0 é conexo.

Exercício 2.13. 1. Prove que os seguintes espaços são conexos.

(a) $\mathbb{R}^n$, $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$, $D_r(x) \subset \mathbb{R}^n$.

(b) S^n , $n \geq 1$.

(c) $\mathbb{R}^n - \mathbb{Z}^n$, $n \geq 2$.

(d) $\mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$, $n \geq 2$.

(e) $S^1 \times S^1$.

2. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x = 0 \text{ e } -1 \leq y \leq q) \text{ ou } (0 < x \leq 1) \text{ e } y = \sin(1/x)\}.$$

Mostre que S é conexo.

3. Considere o conjunto

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1 \text{ ou } x = e^{\theta+1} \cos(\theta) \text{ e } y = e^{\theta+1} \sin(\theta), \theta \leq \pi\}.$$

Mostre que é conexo.

A conexidade por caminhos é preservada por continuidade.

Proposição 2.14. *Seja X, Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ função contínua e sobrejetora. Se X é conexo por caminhos, então Y também é.*

Demonstração. Dados y_0 e y_1 elementos de Y , sejam x_0 e x_1 tais que $f(x_i) = y_i$. Como X é conexo por caminhos, existe $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ caminho tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Logo, $f \circ \alpha$ é um caminho ligando y_0 e y_1 . $\square$

Um subconjunto $A \subset X$ é conexo por caminhos se A com a topologia induzida de X é conexo por caminhos.

Proposição 2.15. *Seja X, Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ função contínua. Se A é conexo por caminhos, então $f(A) \subset Y$ é conexo por caminhos.*

Demonstração. Exercício. $\square$

Teorema 2.16. *Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos conexos por caminhos de um espaço X . Suponha que existe $i_0 \in I$ tal que $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset, \forall i \in I$. Então $A = \cup_{i \in I} A_i$ é conexo.*

Demonstração. A ideia da prova é construir um caminho que liga dois pontos quaisquer x e y de A . Como $x \in A_j$ e $y \in A_k$, para algum j e algum $k \in I$, temos que $A_j \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ e $A_k \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Então tomemos $x_j \in A_j \cap A_{i_0}$ e $x_k \in A_k \cap A_{i_0}$. Como existe um caminho ligando x a x_j , um caminho ligando x_j a x_k e um caminho ligando x_k a y , é fácil construir um caminho ligando x a y . $\square$

Exercício 2.17. Mostre que as condições abaixo implicam na condição do teorema acima.

1. $\exists x_0 \in X; x_0 \in A_i, \forall i \in I.$

2. $A_i \cap A_j \neq \emptyset, \forall i \text{ e } j \in I.$

Definição 2.18. Dado um conjunto X , definimos a seguinte relação de equivalência em X : $x \sim y$ se, e somente se, existe um subconjunto de X conexo que contém ambos. As classes de equivalência são chamadas de **componentes conexas** de X . Analogamente definimos a componente conexas por caminhos.

Exercício 2.19. Mostre que as relações definidas acima são relações de equivalência.

Teorema 2.20. *As componentes de X são subconjuntos de X conexos e disjuntos. Além disso, cada subconjunto conexo de X intersecta apenas um deles.*

Demonstração. A relação de equivalência particiona o conjunto em subconjuntos dois a dois disjuntos. Se $A \subset X$ intersecta as componentes conexas C_1 e C_2 em pontos x_1 e x_2 , respectivamente, então $x_1 \sim x_2$ e isto acontece apenas se $C_1 = C_2$. Agora provaremos que cada componente C é conexa, de fato tomemos um ponto $x_0 \in C$. Para cada $x \in C$ temos $x \sim x_0$, assim existe um conjunto conexo A_x contendo x e x_0 . Como $A_x \subset C$, então $C = \cup_{x \in C} A_x$. Como os conjuntos A_x são conexos tendo o ponto x_0 em comum, então C é conexo. $\square$

Um teorema análogo vale para componentes por caminhos. A prova é imediata e deixamos como exercício.

Teorema 2.21. *As componentes conexas por caminhos são subconjuntos disjuntos conexos por caminhos. Além disso, cada subconjunto conexo por caminhos intersecta apenas uma das componentes.*

2.1 Espaços de Hausdorff

Um espaço topológico X é de **Hausdorff** se para quaisquer dois pontos distintos x e y de X , existem vizinhanças V de x e U de y

disjuntas. Neste caso dizemos que a topologia de X é Hausdorff ou que separa pontos.

É claro que todo espaço métrico é espaço de Hausdorff e assim o espaço $\mathbb{R}^n$ também o é. Todo espaço com a topologia discreta é Hausdorff. O conjunto $\mathbb{N}$ com a topologia $\tau = \{A \subset \mathbb{N}; A = \emptyset \text{ ou } A^c \text{ finito}\}$ não é espaço de Hausdorff.

Definição 2.22. Uma sequência (x_n) , $n \in \mathbb{N}$ de um espaço topológico X converge para $a \in X$ se para cada vizinhança V de a , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. O ponto $a \in X$ é chamado de limite da sequência e representamos isto por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Proposição 2.23. *Seja X um espaço de Hausdorff e (x_n) uma sequência convergente em X . Então, o seu limite é único.*

Demonstração. Suponhamos $a \neq b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. Como $a \neq b$, existem vizinhanças $V \ni a$ e $U \ni b$ disjuntas e naturais n_1 e n_2 tais que $x_n \in V$, $\forall n \geq n_1$ e $x_n \in U$, $\forall n \geq n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $x_n \in V \cap U$, $\forall n \geq n_0$, o que é absurdo. $\square$

Teorema 2.24. *Um espaço X é Hausdorff se, e somente se, a diagonal $\Delta = \{(x, x); x \in X\}$ é conjunto fechado em X^2 .*

Demonstração. Suponha que X é Hausdorff, provaremos que Δ^c é aberto em X^2 . O par $(x, y) \in \Delta^c$ se, e somente se $x \neq y$, como X é Hausdorff existem vizinhanças disjuntas $V \ni x$ e $U \ni y$. Então, $V \times U \cap \Delta = \emptyset$, isto é, $(V \times U) \subset \Delta^c$ e portanto Δ^c é aberto.

Reciprocamente, se Δ é fechado então Δ^c é aberto. Dado $(x, y) \in \Delta^c$ existe um aberto do tipo $V \times U \subset \Delta^c$ com $(x, y) \in V \times U$ e V e U são abertos de X . Como $(V \times U) \cap \Delta = \emptyset$, temos que $V \cap U = \emptyset$ e assim X é Hausdorff. $\square$

Proposição 2.25. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua e Y um espaço de Hausdorff. Então, o $\text{Graf}(f)$ é um conjunto fechado em $X \times Y$.*

Demonstração. Defina a aplicação F dada por $X \times Y \mapsto (f(x), y) \in Y^2$ que é claramente contínua. Se Δ_Y é a diagonal de Y^2 temos que

$\text{Graf}(f) = F^{-1}(\Delta_Y)$. Como Y é espaço de Hausdorff, a diagonal Δ_Y é fechado e assim $\text{Graf}(f)$ é fechado em $X \times Y$. $\square$

Exercício 2.26. 1. Sejam (X_i) , $i = 1, \dots, n$ espaços de Hausdorff. Mostre que $X = \prod_{i=1}^n X_i$ é espaço de Hausdorff.

2. Seja $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo e X espaço de Hausdorff. Mostre que Y é espaço de Hausdorff.

2.2 Espaços Compactos

Uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de um espaço X é chamada uma **cobertura** para X , se a união dos elementos de $\mathcal{C}$ é igual a X . A cobertura é chamada aberta se seus elementos são subconjuntos abertos de X .

Um espaço X é **compacto** se toda cobertura aberta contém uma sub-coleção finita que ainda cobre X .

Definição 2.27. Seja Y um subespaço de X . Uma coleção de subconjuntos de X é dita cobrir Y se a união de seus elementos contém Y .

Lema 2.28. *Seja Y subespaço de X . Então, Y é compacto se, e somente se, toda cobertura de Y por abertos em X contém uma sub-coleção finita cobrindo Y .*

Demonstração. Se Y é compacto e $\mathcal{C} = (A_\alpha)_{\alpha \in I}$ é uma cobertura de Y por abertos de X , então a coleção composta dos elementos $A_\alpha \cap Y$, $\alpha \in I$ é uma cobertura de Y por meio de abertos em Y . Portanto, existe uma subcoleção finita $\{Y \cap A_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n\}$ que cobre Y . Segue que a subcoleção de $\mathcal{C}$ dada por $\{A_{\alpha_i}, i = 1, \dots, n\}$ cobre Y .

Para provar a recíproca, seja $\mathcal{C}' = (A'_\alpha)$ uma cobertura para Y por abertos de Y . Para cada α escolhemos um aberto em X , A_α , tal que $A'_\alpha = A_\alpha \cap Y$. A coleção (A_α) cobre Y por meio de abertos de X . Pela hipótese, existe uma subcoleção finita $\{A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_n}\}$ que cobre Y e portanto $\{A'_{\alpha_1}, \dots, A'_{\alpha_n}\}$ é uma subcoleção de $\mathcal{C}'$ que cobre Y . $\square$

Teorema 2.29. *Todo subconjunto fechado Y de um espaço compacto X é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura de Y por abertos em X . Então, $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\}$ é uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, existe uma subcoleção finita de $\mathcal{B}$ que ainda cobre X . Se esta subcoleção contém $\{X - Y\}$, então descartando-a, obtemos uma subcoleção finita de $\mathcal{A}$ que cobre Y . Agora usamos o lema acima para concluir que Y é compacto. $\square$

Teorema 2.30. *Um subconjunto compacto K de um espaço de Hausdorff X é fechado.*

Demonstração. A ideia é provar que $K^c = (X - K)$ é aberto. Fixemos $x_0 \in K^c$. Para cada $k \in K$, tomemos vizinhanças U_k e V_k dos pontos x_0 e $k \in K$, respectivamente, disjuntas. A coleção $\{V_k; k \in K\}$ é uma cobertura de K por conjuntos abertos em X , segue que existem $\{V_{k_i}; k_i \in K, i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}\}$ que ainda cobrem K . Assim, o conjunto aberto $V = \cup_{i=1}^n V_{k_i}$ contém K e é disjunto do conjunto aberto $U = \cap_{i=1}^n U_{k_i}$ formado pela interseção das correspondentes vizinhanças de x_0 . Portanto, U é uma vizinhança de x_0 disjunta de K . Segue que $(X - K)$ é aberto. $\square$

O teorema a seguir afirma que aplicações contínuas levam conjuntos compactos em conjuntos compactos.

Teorema 2.31. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se X é compacto, então $f(X)$ é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura por abertos de Y . Tomemos $\mathcal{B} = \{f^{-1}(A); A \in \mathcal{A}\}$. Como f é contínua, então $\mathcal{B}$ é uma cobertura de X por abertos de X . Portanto, podemos extrair uma subcoleção de $\mathcal{B}$ digamos $\{f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_n)\}$ que cobre X . Segue que $A_1, \dots, A_n$ cobre $f(X)$. $\square$

O próximo teorema é importante na construção de homeomorfismos.

Teorema 2.32. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção contínua. Se X é compacto e Y é Hausdorff, então f é um homeomorfismo.*

Demonstração. Para provar que f^{-1} é contínua, provaremos que a imagem por f de todo conjunto fechado é fechado em Y . Seja $A \subset X$

fechado, então segue que A é compacto e assim $f(A)$ é compacto. Como Y é espaço de Hausdorff, $f(A)$ é fechado em Y . $\square$

Teorema 2.33. *Seja $A \subset \mathbb{R}$. Então, A é compacto se, e somente se, A é limitado e fechado.*

Demonstração. Se A é compacto, então A é fechado pois $\mathbb{R}$ é Hausdorff. Provaremos que é limitado. Para isto tomemos os abertos $U_n = (-n, n) \cap A$, $n \in \mathbb{N}$, de A que claramente cobrem A . Pela compacidade, existem $U_{n_1}, \dots, U_{n_k}$ que cobrem A . Logo, $A \subset (-n_k, n_k)$. Para a recíproca basta provar que todo intervalo $[a, b]$ é compacto, pois A sendo limitado ele está contido em algum intervalo $[a, b]$. Consideremos uma cobertura $(U_i) = U'_i \cap [a, b]$, $i \in I$ por abertos de $[a, b]$, onde os conjuntos U'_i são abertos de $\mathbb{R}$. Seja

$$K = \{x \in [a, b]; \exists J \text{ finito}, J \subset I \text{ e } [a, x] \subset \cup_{j \in J} U_j\}.$$

Provaremos que $K = [a, b]$. Existe $i \in I$ tal que $a \in U_i$ e portanto, $[a, a + \varepsilon] \subset U_i$, para algum $\varepsilon > 0$. Como $K = \cup\{[a, x], x \in [a, b]\}$, K é um intervalo. Seja $s = \sup K$. Se provarmos que $s = b$, então teremos provado o que queríamos, isto é, $[a, b]$ é coberto por uma subfamília finita. Sabemos que existe $i_s \in I$ tal que $s \in U_{i_s}$ e portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset U_{i_s}$. Como $s = \sup K$, então existe $x \in K$ tal que $s - \varepsilon < x < s + \varepsilon$; $x \in U_{i_s}$. Pela definição de K , existe J finito tal que $[a, x] \subset \cup_{j \in J} U_j$. Segue que a família (U_j) , $j \in J$ juntamente com U_{i_s} cobre $[a, s + \varepsilon]$. Isto é, $[a, s + \varepsilon) \subset K$ o que está em contradição com a definição de s . Devemos ter então $s = b$. $\square$

O mesmo resultado vale para conjuntos do $\mathbb{R}^n$, este é o teorema de Heine-Borel.

Teorema 2.34 (Heine-Borel). *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Então, A é compacto se, e somente se, A é limitado e fechado.*

Demonstração. É fácil provar que A compacto implica em limitado e fechado. Provaremos a implicação inversa, i.e., A fechado e limitado implica A compacto; para isto usaremos o fato que o produto cartesiano de um número finito de compactos é compacto. Como A é limitado, então existe um retângulo $S = [-m, m] \times \dots \times [-m, m]$,

(n vezes) tal que $A \subset S$. Sendo S compacto e A fechado segue que A é compacto. $\square$

O seguinte teorema, usado acima, é muito importante. Sua prova é um pouco difícil e não é nosso objetivo apresentá-la aqui.

Teorema 2.35 (Tychonoff). *O produto de infinitos espaços compactos é compacto.*

2.3 Compactos de um Espaço Métrico

Já provamos que na reta real os conjuntos fechados e limitados coincidem com os conjuntos compactos. Nesta seção provaremos outros resultados importantes em espaços métricos. Iniciamos com alguns resultados em $\mathbb{R}^n$.

Um retângulo S no espaço $\mathbb{R}^n$ é um conjunto da forma $I_1 \times \cdots \times I_n$ onde cada I_k é um intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Uma sequência de conjuntos é dita uma sequência de conjuntos encaixados se $S_{k+1} \subset S_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.36. *Seja (S_k) uma sequência de retângulos encaixados do $\mathbb{R}^n$. Então, $\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k \neq \emptyset$.*

Demonstração. Primeiro provaremos o resultado em $\mathbb{R}^1$. Seja (I_k) uma sequência de intervalos compactos $[a_k, b_k]$. Sejam

$$A = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{b_k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Como a sequência é encaixada cada elemento de B é um limite superior para A . Seja $a = \sup A$, então $a_k \leq a \leq b_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Segue que $a \in I_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, provando que a interseção é não vazia.

Tomemos agora uma sequência de retângulos encaixados da forma $S_k = I_k^{(1)} \times \cdots \times I_k^{(n)}$ em $\mathbb{R}^n$. A primeira parte já provada mostra que existe um número $a_l \in I_k^{(l)}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Mas então

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in I_k^{(1)} \times \cdots \times I_k^{(n)}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto existe $a \in S_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. $\square$

Como aplicação podemos agora provar que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Corolário 2.37. $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Demonstração. Basta provar que $[0, 1]$ é não enumerável. Se fosse enumerável, tomaríamos $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ sobrejetora, então $f(1)$ não está em pelo menos um dos intervalos $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$. Seja I_1 este intervalo. Quebrando este intervalo em três outros subintervalos congruentes, pelo menos um deles não contém $f(2)$. Denote este intervalo por I_2 . Continuando desta maneira, obtemos uma sequência de intervalos compactos encaixados (I_k) tal que $f(k) \notin I_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$f(\mathbb{N}) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^c = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \right)^c.$$

Isto contradiz a hipótese que f é sobrejetora porque a interseção da sequência (I_k) é não vazia. $\square$

O teorema de Bolzano-Weierstrass é um dos mais importantes resultados da Análise real.

Teorema 2.38 (Bolzano-Weierstrass). *Todo conjunto infinito limitado E do $\mathbb{R}^n$ tem um ponto de acumulação.*

Demonstração. Como E é limitado, então está contido em algum retângulo fechado S . O retângulo S pode ser coberto por um número finito de sub-retângulos onde cada um deles tem dimensões igual a metade das dimensões de S . Pelo menos um desses subretângulos contém um subconjunto infinito E_1 de E . Seja S_1 este subretângulo contendo E_1 . Repetindo o processo com o conjunto infinito e limitado E_1 obtemos um subretângulo S_2 de dimensões igual a metade das dimensões de S_1 e que contém um subconjunto infinito E_2 de E_1 . Seguindo este procedimento construímos uma sequência (S_k) de subretângulos compactos onde cada um contém um subconjunto infinito. Pelo teorema dos retângulos encaixados existe um elemento $a \in S_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Seja B a bola de centro a e raio $\varepsilon > 0$ qualquer. Como as dimensões de cada S_k é 2^{-k} vezes as dimensões de S , então S_k estará dentro de B para k suficientemente grande. Assim, B contém um conjunto infinito de E e portanto a é um ponto de acumulação. $\square$

O teorema da interseção de Cantor generaliza o teorema dos retângulos encaixados.

Teorema 2.39. *Seja (F_n) uma sequência de subconjuntos não vazios, fechados e encaixados de um conjunto compacto K em um espaço métrico X . Então*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Demonstração. Se um dos conjuntos F_n é finito o resultado é imediato. Caso contrário podemos construir um subconjunto infinito E de K consistindo de um ponto de cada um dos conjuntos F_n . Sendo E infinito então E tem um ponto de acumulação a e como todos os elementos de E , exceto um número finito pertencem a cada fechado F_n segue que $a \in F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim, $a \in \bigcap F_n$. $\square$

Teorema 2.40. *Seja K um conjunto compacto de um espaço métrico M e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então, f assume valores máximo e mínimo sobre o conjunto K , isto é, existe x_0 e $x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, $\forall x \in K$.*

Demonstração. Sabemos que $f(K)$ é compacto e portanto é limitado e fechado. Como $f(K) \subset \mathbb{R}$ é fechado e limitado superiormente, então tem um máximo. Do mesmo modo $f(K)$ tem um mínimo. $\square$

2.4 Espaços Métricos Completos

Uma sequência (x_n) num espaço métrico (M, d) é dita de **Cauchy** se, para cada $\varepsilon > 0$ dado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, $\forall m, n > n_0$.

É fácil ver que toda sequência de Cauchy é limitada e que toda sequência convergente é de Cauchy. Deixamos as demonstrações destes fatos como exercício.

Teorema 2.41. *Seja (M, d) um espaço métrico e (x_n) uma sequência de Cauchy em M . Se alguma subsequência (x_{n_k}) converge para $x \in M$, então (x_n) converge para x .*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$, $\forall n_k > n_1$. Como a sequência é de Cauchy, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$, $\forall m, n > n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, se $n > n_0$ podemos escolher $n_k > n_0$ tal que $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Logo, $x_n \rightarrow x$. $\square$

Num espaço métrico, as sequências de Cauchy não são necessariamente convergentes. O corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais é exemplo onde as sequências de Cauchy não são convergentes em $\mathbb{Q}$.

Definição 2.42. Dizemos que o espaço métrico (M, d) é **completo** se toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Exemplo 2.43. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a métrica usual, é um espaço métrico completo. De fato, seja (x_n) uma sequência de Cauchy de números reais. Seja $a_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Como (x_n) é limitada temos $a_1 \leq a_2 \leq \dots$. Seja $a = \lim a_n$. Provaremos que $\lim x_n = a$. Provaremos que existe uma subsequência convergente portanto a sequência é convergente.

Dados $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Como a_m é um ínfimo, então $a_m \leq a + \varepsilon$ implica que existe $n > m$ tal que $a_m \leq x_n < a + \varepsilon$, isto é, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

2.5 Completamento de Espaço Métrico

Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ é dita uma **isometria** se T preserva distâncias, isto é,

$$d'(Tu, Tv) = d(u, v), \forall u, v \in X.$$

Dizemos que X e Y são isométricos se T é uma isometria bijetora. Note que toda isometria é injetora.

Teorema 2.44. *Para um espaço métrico (X, d) existe um espaço métrico completo (X', d') que tem um subespaço W que é denso em X' . Este espaço é único exceto por isometrias.*

Demonstração. Primeiramente vamos construir o espaço chamado o completamento de (X, d) . Sejam (u_n) e (v_n) sequências de Cauchy em X . Defina $(u_n) \sim (v_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n) = 0$. Esta relação

é uma relação de equivalência. Seja $\hat{X}$ o espaço de todas as classes de equivalências $\hat{x}, \hat{u}, \dots$. Defina

$$\hat{d}(\hat{u}, \hat{v}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n), \quad \text{onde } (u_n) \in \hat{u}, (v_n) \in \hat{v}.$$

São perguntas naturais: este limite existe? Depende dos representantes? As respostas são óbvias e estas questões ficam como exercício.

Como $d(u_n, v_n) \leq d(u_n, u_m) + d(u_m, v_m) + d(v_m, v_n)$ obtemos

$$d(u_n, v_n) - d(u_m, v_m) \leq d(u_n, v_m) + d(v_m, v_n)$$

e trocando m por n temos que

$$|d(u_m, v_m) - d(u_n, v_n)| \leq d(u_n, u_m) + d(v_m, v_n).$$

Como (u_n) e (v_n) são de Cauchy, segue que $|d(u_n, v_m) - d(u_n, v_n)|$ é tão pequeno quanto desejado. Deixamos como exercício mostrar que $\hat{d}$ é uma métrica.

Agora vamos construir a isometria. A cada $b \in X$ associamos a classe $\hat{b} \in \hat{X}$ que contém a sequência constante $b = (b, b, b, \dots)$. Defina $T : X \rightarrow W$ dada por $T(b) = \hat{b}$ e $W = T(X)$. T é uma isometria, pois $\hat{d}(\hat{b}, \hat{c}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(b, c) = d(b, c)$. Além disso, pela definição T é sobrejetora e assim W e X são isométricos.

Agora provaremos que $\overline{W} = \hat{X}$. Considere $\hat{x} \in \hat{X}$ e seja $(x_n) \in \hat{x}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_N) < \varepsilon/2$, $\forall n > N$. Seja $(x_N, x_N, \dots) \in \hat{x}_N$. Então, $\hat{x}_N \in W$ e

$$\hat{d}(\hat{x}_N, \hat{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_N) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Isto prova que toda ε -vizinhança de $\hat{x}$ contém um elemento de W . Logo, W é denso em $\hat{X}$.

Para mostrar que $\hat{X}$ é completo, tomemos uma sequência de Cauchy em $\hat{X}$, como W é denso em $\hat{X}$ para todo $\hat{x}_n$ existe $\hat{z}_n \in W$ tal que $\hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) < 1/n$. Logo, $\hat{d}(\hat{z}_n, \hat{z}_m) \leq \hat{d}(\hat{z}_n, \hat{x}_n) + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + \hat{d}(\hat{x}_m, \hat{z}_m) < 1/n + \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{x}_m) + 1/m$, que tende a zero. Assim a sequência $(\hat{z}_n)$ é de Cauchy.

Como T é isometria e $\hat{z}_m \in W$ a sequência (z_m) , onde $z_m = T^{-1}(\hat{z}_m)$ é de Cauchy em X . Seja $\hat{x} \in \hat{X}$ a classe tal que $(z_m) \in \hat{x}$. Vamos provar que $\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n$. De fato, $\hat{d}(\hat{x}, \hat{x}_n) \leq \hat{d}(\hat{x}_n, \hat{z}_n) + \hat{d}(\hat{x}, \hat{z}_n) < \hat{d}(\hat{x}, \hat{z}_n) + 1/n$. Como $(z_m) \in \hat{x}$ e $\hat{z}_n \in W$, então $(z_n, z_n, \dots) \in \hat{z}_n$, e assim, $\hat{d}(\hat{x}, \hat{z}_n) + 1/n < \lim_{m \rightarrow \infty} d(z_n, z_m) + 1/n$, que tende a zero. Assim, $(\hat{X}, \hat{d})$ é completo. A unicidade é deixada como exercício. $\square$

Exemplo 2.45.

1. Seja $C_\infty(\mathbb{R}) = \{f; f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua e } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0\}$ munido da métrica induzida pela norma do supremo é um espaço completo.
2. Seja $C_c(\mathbb{R}) = \{f; f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua de suporte compacto}\}$ munido da métrica induzida pela norma do supremo não é completo. O seu completamento é o espaço $C_\infty(\mathbb{R})$.
3. Para $1 < p \leq \infty$ seja $C([0, 1])$ o espaço das funções contínuas munido da métrica induzida pela norma dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

não é completo. O completamento desses espaços é $L^p([0, 1])$.

Exercícios do Capítulo 2

Exercício 2.46. Mostre que em qualquer espaço métrico, toda sequência convergente é de Cauchy.

Exercício 2.47. Mostre que $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana é um espaço métrico completo.

Exercício 2.48. Seja X um espaço métrico completo e $Y \subset X$ um subconjunto fechado. Mostre que Y é completo.

Exercício 2.49. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais com a métrica usual não é completo.

Exercício 2.50. Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ uma isometria. Mostre que f é contínua e injetora.

Exercício 2.51. Mostre que a união finita de conjuntos compactos é compacta.

Exercício 2.52. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e X um espaço compacto. Mostre que se Y é Hausdorff, então f é uma aplicação fechada.

Exercício 2.53. Mostre que todo espaço métrico compacto é completo.

Capítulo 3

Teoremas de Ponto Fixo

3.1 Introdução

Se um conjunto é levado em si mesmo por uma função f , pode acontecer que algum ponto seja mantido fixo pela função. Um ponto x satisfazendo $f(x) = x$ é chamado ponto fixo da aplicação f . Se um disco é rotacionado sobre si mesmo de um ângulo $\theta > 0$, o centro do disco é o único ponto fixo. Considerando agora o disco sem o seu centro, a mesma aplicação não tem ponto fixos. Por outro lado, a aplicação identidade $f : X \rightarrow X$ tem todos os pontos de X como seus pontos fixos. Assim uma aplicação de um conjunto em si mesmo pode ter um único, pode ter infinitos ou pode não ter ponto fixo.

Geometricamente, um ponto fixo existe quando os gráficos das funções $y = f(x)$ e $y = x$ se cruzam. Veja a figura 3.1.

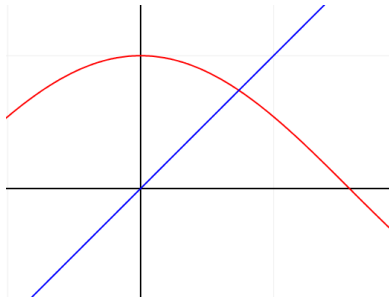
O seguinte teorema é um resultado simples sobre existência de ponto fixo.

Teorema 3.1. *Toda aplicação contínua $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração. Defina a seguinte aplicação $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Assim g mede a distância orientada entre x e sua imagem $f(x)$. Um ponto fixo de f é um ponto x onde $g(x) = 0$. Se um dos extremos do intervalo é ponto fixo nada temos a provar.

Então suponha que nenhum deles seja ponto fixo. Como $f(a)$ e $f(b)$ estão no intervalo $[a, b]$ segue que $a < f(a)$ e $f(b) < b$ e portanto $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Como g é contínua, existe $x \in [a, b]$ tal que $g(x) = 0$. $\square$

O teorema acima pode ser visualizado no gráfico.



3.2 Princípio da Contração

Um dos teoremas mais importantes sobre ponto fixo é o teorema do ponto fixo de Banach ou o princípio da contração. Sejam (M, d) e (N, d_1) dois espaços métricos. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita uma contração se existe $0 \leq k < 1$ tal que

$$d_1(f(x), f(y)) \leq k d(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

É fácil ver que toda contração é uniformemente contínua.

Teorema 3.2 (Princípio da Contração). *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \rightarrow M$ uma contração. Então, f possui um único ponto fixo em M . Além disso, dado $x_0 \in M$ a sequência definida por*

$$x_1 = f(x_0), \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 1. \quad (3.1)$$

é uma sequência convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ é ponto fixo de f .

O Teorema acima é tão poderso e geral que diversas aplicações decorrem dele, por exemplo ele pode ser usado para determinar existência soluções de EDO's. Veja o Teorema 4.1.

Demonstração. Se a sequência (x_n) definida acima converge para $a \in M$, então como f é contínua temos

$$f(a) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a.$$

Provando que a é ponto fixo de f .

Se f tem dois pontos fixos a e b , então temos

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq k d(a, b),$$

o que é absurdo a menos que $a = b$. Logo, $a = b$.

Resta provar que a sequência (x_n) converge. Notemos que $d(x_1, x_2) \leq k d(x_0, x_1)$ e que em geral $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Segue que para $n, p \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq [k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1}] d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1 - k} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\lim k^n = 0$ segue que a sequência é de Cauchy e portanto convergente, o que completa a prova do teorema. $\square$

Exemplo 3.3. Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma aplicação contínua com derivada tal que $\sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| = k < 1$. Então, f é uma contração.

Este resultado decorre da seguinte desigualdade

$$|f(y) - f(x)| \leq |y - x| \sup_{c \in (a, b)} |f'(c)| \leq k |y - x|.$$

Agora vamos ver um resultado que estabelece a relação entre pontos fixos de duas contrações. Duas aplicações A e B de um espaço métrico (M, d) em (M, d) são ditas ε -próximas se

$$d(Ax, Bx) \leq \varepsilon, \quad \forall x \in M.$$

Teorema 3.4. *Sejam A e B duas contrações definidas sobre um espaço métrico completo (M, d) . Suponha que*

$$\begin{aligned} d(Ax, Ay) &\leq k_A d(x, y) \\ d(Bx, By) &\leq k_B d(x, y), \quad \forall x, y \in M \end{aligned}$$

e que A e B são ε -próximas. Então, a distância entre seus pontos fixos não excede $\frac{\varepsilon}{1-k}$, onde $k = \min\{k_A, k_B\}$.

Demonstração. Sejam x_0 e y_0 pontos fixos de A e B , respectivamente. Então y_0 é o limite da sequência $Bx_0, B^2x_0, \dots, B^n x_0, \dots$. Assim, temos que

$$d(x_0, B^n x_0) \leq \frac{1}{1-k_B} d(x_0, Bx_0) = \frac{1}{1-k_B} d(Ax_0, Bx_0) \leq \frac{\varepsilon}{1-k_B},$$

pois A e B são ε -próximas. Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$d(x_0, y_0) \leq \frac{\varepsilon}{1-k_B}.$$

Repetindo o mesmo argumento com a sequência $Ax_0, A^2x_0, \dots, A^n x_0, \dots$, obtemos que $d(x_0, y_0) \leq \frac{\varepsilon}{1-k_A}$.

Isto conclui a prova do teorema. □

3.3 Exemplos Simples

Vamos usar o teorema das contrações, para determinar soluções de uma equação $f(x) = a$.

Tendo f , escrevemos

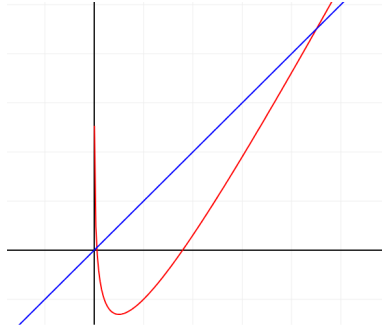
$$F(x) = f(x) + x - a.$$

Vemos claramente que toda solução da equação original é solução da equação $F(x) = x$.

Para resolver esta equação, vamos supor que F seja uma contração. Tomemos um ponto arbitrário x_0 e consideramos a sequência dada por

$$x_1 = F(x_0), \quad x_2 = F(x_1), \quad x_3 = F(x_2), \quad \dots, \quad x_{n+1} = F(x_n), \quad \dots$$

Já provamos que a sequência converge para um ponto fixo de $F(x)$, e portanto para uma solução da equação original $f(x) = a$.



Exemplo 3.5. Tomemos a função $f(x) = 2x - 3 - \ln(x)$. Graficamente, figura 3.2, vemos que existem duas raízes para a equação $f(x) = 0$, as soluções são aproximadamente $x = 0.0556$ e $x = 1.7915$.

Agora vamos confirmar estas soluções usando um método de iteração simples. A equação $f(x) = 0$ pode ser reescrita como

$$x = \frac{\ln(x) + 3}{2}.$$

Chamemos $g(x) = \frac{\ln(x)+3}{2}$ e vamos procurar então um ponto fixo para g .

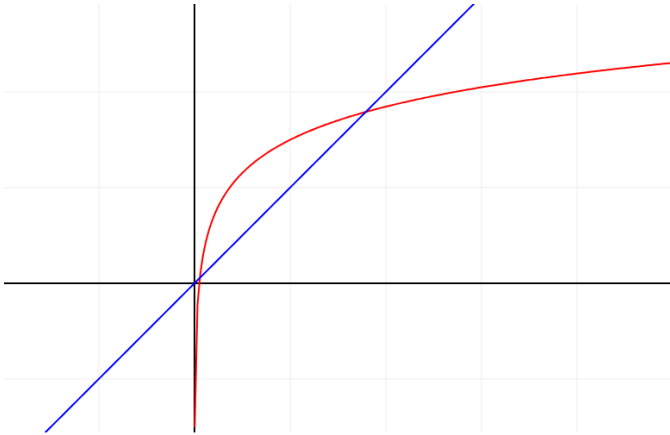
Usando o procedimento, obtemos uma primeira aproximação em $x = 1$: 1.500000000. Repetindo, obtemos uma segunda aproximação 1.702732554. Repetindo esta iteração com cada aproximação sucessiva, podemos confirmar que $x = 1.7915$ é uma aproximação. Veja a tabela com as iterações.

A existência de uma solução pode ser visto graficamente, figura 3.3, se plotarmos juntas as duas expressões. Vemos que os gráficos das duas expressões se encontram.

3.4 Outros Teoremas de Ponto Fixo

Definição 3.6. Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma contração generalizada no

Iteração	x_n	$g(x_n)$	$ x_{n+1} - x_n $
1	1.00000000	1.50000000	0.50000000
2	1.50000000	1.70273255	0.20273255
3	1.70273255	1.76611717	0.06338462
4	1.76611717	1.78439172	0.01827455
5	1.78439172	1.78953879	0.00514707
6	1.78953879	1.79097896	0.00144017
7	1.79097896	1.79138119	0.00040222
8	1.79138119	1.79149347	0.00011228
9	1.79149347	1.79152481	0.00003134



sentido de Krasnoselskii se

$$d(f(x), f(y)) < \alpha(a, b) d(x, y)$$

para $a < d(x, y) < b$ e $\alpha(a, b) \in [0, 1)$ com $0 < a < b$.

Teorema 3.7. *Seja (X, d) um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ uma contração generalizada no sentido de Krasnoselskii. Então, existe um único ponto fixo $x_0 \in X$ de f .*

Demonstração. Tomemos $x \in X$ e consideremos a sequência definida por $x_1 = f(x)$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Defina $a_n = d(x_n, x_{n-1})$. Segue das propriedades de f que a sequência (a_n) é não crescente. Seja $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, se $a > 0$ então para N suficientemente grande e

para todo m , temos

$$a_{N+m} \leq [\alpha(a, a+1)]^m (a+1)$$

e isto contradiz o fato que $a > 0$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado e escolha N tal que

$$a_N \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left[1 - \alpha\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right)\right],$$

mostraremos que f deixa invariante o conjunto $\{x; d(x, x_N) \leq \varepsilon\}$. Isto implica que a sequência (x_n) é de Cauchy. Para mostrar que f deixa invariante o conjunto acima, podemos ver que se $d(x, x_N) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ então

$$d(f(x), x_N) \leq d(f(x), f(x_N)) + a_N \leq d(x, x_N) + a_N \leq \varepsilon,$$

e se $\frac{\varepsilon}{2} < d(x, x_N) \leq \varepsilon$ obtemos

$$d(f(x), f(x_N)) \leq d(f(x), f(x_N)) + a_N \leq \alpha\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right) + a_N \leq \varepsilon$$

e a invariância está provada. Seja $\lim x_n = x_0$, então é claro que x_0 é um ponto fixo. A unicidade é deixado como exercício. $\square$

Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é uma contração local se para todo $x \in X$ existem ε_x e λ_x tal que para u e v em

$$\{y; d(x, y) \leq \varepsilon_x\} \quad \text{e} \quad \varepsilon_x > 0 \quad \text{e} \quad \lambda_x \in [0, 1)$$

vale a relação

$$d(f(u), f(v)) \leq \lambda_x d(u, v).$$

Teorema 3.8. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \rightarrow X$ uma contração local. Então f tem um único ponto fixo.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$F(x) = d(f(x), x), \quad x \in X.$$

Como X é compacto e F é contínua, então F assume o mínimo em um ponto x_0 . Como f é uma contração local segue que x_0 é um ponto fixo de f . $\square$

Definição 3.9. Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é uma contração potência local se existe uma constante $K < 1$, e para cada $x \in X$, existe um inteiro $n = n(x)$ tal que, para todo $y \in X$,

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq K d(x, y).$$

Para esta classe de aplicações temos o seguinte teorema:

Teorema 3.10. *Seja (X, d) espaço métrico completo e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contração potência local. Então existe um único ponto fixo de f .*

Para a prova deste teorema vamos precisar do seguinte lema:

Lema 3.11. *Se $f : X \rightarrow X$ é uma contração potência local, então para cada $x \in X$ o número $r(x) = \sup\{d(x, f^n(x)); n \in \mathbb{N}\}$ é finito.*

Demonstração. Para cada $x \in X$ seja

$$m(x) = \max\{d(x, f^k(x)); 1 \leq k \leq n(x)\}.$$

Se n é um inteiro arbitrário existe $s > 0$ tal que

$$s n(x) \leq n \leq (s + 1) n(x)$$

e isto dá

$$\begin{aligned} d(x, f^n(x)) &\leq d(f^{n(x)} \circ f^{n-n(x)}(x), f^{n(x)}(x)) + d(f^{n(x)}(x), x) \\ &\leq K d(f^{n-n(x)}, x) + m(x) \\ &\leq m(x) + K m(x) + \cdots + K^s m(x) \\ &\leq \frac{m(x)}{1 - K} \end{aligned}$$

e isto termina a prova. □

Agora vamos dar a prova do teorema. Sejam $x_0 \in X$ um ponto arbitrário, $n_0 = n(x_0)$, e $x_1 = f^{n_0}(x_0)$ e definimos indutivamente a sequência de pontos de (x_i) em X como segue: $n_i = n(x_i)$ e $x_{i+1} =$

$f^{n_i}(x_i)$. Primeiro provaremos que a sequência (x_i) é uma sequência de Cauchy. Para isto vamos estimar $d(x_n, x_m)$. Temos,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f^{n_{n+1}} \circ f^{n_n}(x_{n-1}), f^{n_{n-1}}(x_{n-1})) \\ &\leq K d(f^{n_n}(x_{n-1}), x_{n-1}) \\ &\leq \dots \leq K^n d(f^{n_1}(x_0), x_0) \end{aligned}$$

e isto implica que para $n > m$,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{K^m}{1 - K}$$

que mostra que (x_i) é sequência de Cauchy. Seja $u = \lim x_i$. Mostraremos que u é ponto fixo de f . Suponha que isto não seja verdade, então encontramos um par de vizinhanças disjuntas U e V contendo u e $f(u)$, respectivamente.

Seja d_0 a distância

$$d_0 = \inf\{d(x, y); x \in U, y \in V\} > 0$$

e como f é contínua para n grande $f(x_n) \in V$ e também $x_n \in U$.

Agora

$$\begin{aligned} d(x_n, f(x_n)) &= d(f^{n_{n-1}} \circ f^{n_n}(x_{n-1}), f^{n_{n-1}}(x_{n-1})) \\ &\leq K d(f(x_{n-1}), x_{n-1}) \leq \dots \leq K^n d(f(x_0), x_0) \end{aligned}$$

e para n grande isto é uma contradição. Como a unicidade é óbvia, o teorema está provado.

Seja X um espaço topológico. Dizemos que X tem a propriedade de ponto fixo se toda aplicação contínua $f : X \rightarrow X$ tem um ponto fixo.

Lema 3.12. *Sejam X e Y espaços topológicos e $h : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Se X tem a propriedade de ponto fixo, então Y também tem a propriedade de ponto fixo.*

Definição 3.13. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que Y é um retrato de X se $Y \subset X$ e se existe uma aplicação contínua $r : X \rightarrow Y$ tal que $r(x) = x, \forall x \in Y$. A aplicação r é chamada uma retração.

Teorema 3.14. *Se X tem a propriedade de ponto fixo e Y é um retrato de X , então Y tem a propriedade de ponto fixo.*

Demonstração. Sejam r uma retração de X em Y e $f : Y \rightarrow Y$ uma aplicação contínua. Defina $g : X \rightarrow X$ dada por $g(x) = f(r(x))$ que é obviamente contínua, e como X tem a propriedade de ponto fixo, então existe $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) = x_0$. Como $x_0 \in Y$ temos $r(x_0) = x_0$. Isto dá o teorema. $\square$

A bola unitária no $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade do ponto fixo. Este é o teorema do ponto fixo de Brouwer. Também o teorema de Schauder diz que todos os compactos convexos do $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade do ponto fixo.

3.5 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Teorema 3.15. *Seja $f : \{x; \|x\| \leq 1\} \rightarrow \{x; \|x\| \leq 1\} = B$ a bola unitária do espaço n -dimensional com f contínua. Então f tem um ponto fixo em B .*

Demonstração. Provaremos primeiramente o teorema quando a função f é infinitamente diferenciável. Neste caso, suponha que $f(x) \neq x$ para todo $x \in B$. Consideremos para cada $x \in B$ a reta de pontos da forma $x + t(x - f(x))$, $t \in \mathbb{R}$, unindo os pontos x e $f(x)$. Sobre a reta existem exatamente dois pontos da esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$. Isto é, a equação quadrática em t

$$\|x\|^2 + 2t\langle x, x - f(x) \rangle + t^2\|x - f(x)\|^2 = 1$$

tem duas raízes reais distintas. Indiquemos por $a(x)$ a maior delas; temos

$$\|x - f(x)\|^2 a(x) = -\langle x, x - f(x) \rangle + \left\{ \langle x, x - f(x) \rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Como a equação tem duas raízes distintas, o discriminante

$$\langle x, x - f(x) \rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - f(x)\|^2$$

é estritamente positivo para todo $x \in B$. Como a função $t \mapsto t^{\frac{1}{2}}$ é de classe C^∞ para $t > 0$ segue que $a(x)$ é infinitamente diferenciável numa vizinhança aberta de B . Como $-1 \leq t \leq 0$ se $x + t(x - f(x))$ está entre $f(x)$ e x , resulta que se $\|x\| = 1$, então $a(x) = 0$.

Defina a família de funções, para $t \in \mathbb{R}$, $f_t : B \rightarrow B$ dadas por $f_t(x) = x + t a(x)(x - f(x))$. Segue que $F : \mathbb{R} \times B \rightarrow B$ dada por $F(x) = f_t(x)$ é de classe C^∞ (numa vizinhança de $\mathbb{R} \times B$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$). Além disso, $f_0(x) = x$ para todo $x \in B$; temos

$$f_1(x) = x + a(x)(x - f(x)) \in S^{n-1}$$

e pela definição de $a(x)$ vem que $\|f_1(x)\| = 1$, para todo $x \in B$. Seja $J(t, x)$ o determinante jacobiano de f_t no ponto x . Segue que $J(0, x) = 1$, $\forall x \in B$, e devido à igualdade $\|f_1(x)\|^2 = 1$, para todo $x \in B$, temos $J(1, x) = 0$, $\forall x \in B$.

Definindo

$$I(t) = \int_B J(t, x) dx_1 \cdots dx_n,$$

temos $I(0) = \text{volume de } B$ e $I(1) = 0$. Provaremos que $I(t)$ é constante o que dará a contradição. Como $I(t)$ é um polinômio em t pois

$$J(t, x) = \sum_{i=0}^n \eta_i(x) t^i,$$

pela definição de f_t . Portanto basta provar que $I(t)$ é constante em algum intervalo $[0, \delta)$.

Seja $g(x) = a(x)(x - f(x))$, $\forall x \in B$. Como B é compacto e $g' : B \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ é contínua, existe $M > 0$ tal que $\|g'(x)\| < M$, $\forall x \in B$.

De outro lado, $g(x) = 0$, se $x \in S^{n-1}$, pois, então, $a(x) = 0$, de modo que, se pusermos $g(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}^n - B$ obteremos uma função contínua de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Para $t \in \mathbb{R}$ e $y \in B$ fixados, seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $T(x) = y - t g(x)$. De $T(x_1) - T(x_2) = t(g(x_1) - g(x_2))$, vem que

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq |t| M \|x_1 - x_2\|,$$

onde $\|g'(x)\| \leq M$ e $x \in B$.

Logo, para $0 < \delta_1 < \frac{1}{M}$ e $0 \leq t < \delta_1$, T é uma contração, portanto tem um e um só ponto fixo, $x_t \in \mathbb{R}^n$. Não podemos ter $\|x_t\| > 1$, pois então $g(x_t) = 0$, logo $x_t = Tx_t = y - tg(x_t) = y \in B$, o que é absurdo, logo $x_t \in B$.

Assim, para todo $t \in [0, \delta_1)$, $f_t : B \rightarrow B$ é uma bijeção.

Tomando agora $0 < \delta < \delta_1$ e tal que $J(t, x) > 0$ para todo $0 \leq t < \delta$ e todo $x \in B$, então pelo teorema da função inversa para todo $t \in [0, \delta)$, f_t é uma aplicação biunívoca de B sobre B cuja inversa é diferenciável no interior de B . Então $I(t)$ é igual ao volume de B para todo $t \in [0, \delta)$. Isto termina a prova do teorema de Brouwer para aplicações de classe C^∞ .

Para estender o resultado a todas as aplicações contínuas $f : B \rightarrow B$ usamos o teorema da aproximação de Weierstrass para representar f como limite uniforme de uma sequência (f_k) de aplicações infinitamente diferenciáveis de B em B .

Como o teorema de Brouwer vale para as f_k existe um $x_k \in B$ tal que $f_k(x_k) = x_k$. Como B é compacto, existe alguma subsequência (x_{k_n}) de (x_k) convergindo a um $x \in B$. Da convergência uniforme $f_{k_n} \rightarrow f$, segue que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x_{k_n})$. De $f_{k_n}(x_{k_n}) = x_{k_n}$, vem que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$. $\square$

O teorema do ponto fixo de Schauder, veja o teorema 3.18, é uma aplicação do teorema de Brouwer.

3.6 Ponto Fixo de Caristi

Em 1972 Ivar Ekeland provou um poderoso resultado. Este teorema, chamado o Princípio Variacional de Ekeland, basicamente diz que se f é semicontínua inferior sobre um espaço métrico completo (X, d) e a valores reais estendidos e limitada inferiormente com $f(x_0)$ próximo de $\inf_{x \in X} f(x)$, então existe uma função Lipschitz contínua g tal que $(f + g)$ tem um mínimo estrito em algum $x \in X$ perto de x_0 .

Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ uma função. Dizemos que f é semicontínua inferior em $x_0 \in X$ se, para qualquer

sequência (x_n) convergente para x_0 , vale

$$f(x_0) \leq \liminf f(x_n).$$

A função f é semicontínua inferior sobre X se for semicontínua inferior em cada elemento $x \in X$. Por domínio efetivo de f entendemos o seguinte conjunto: $\text{dom}(f) = \{x \in X; f(x) < \infty\}$.

Teorema 3.16 (Princípio variacional de Ekeland). *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ semicontínua inferior e limitada inferiormente. Sejam $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in X$ tal que*

$$f(x_0) < \inf_{x \in X} f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, para todo $\lambda > 0$ existe $x_\lambda \in \text{dom}(f)$ satisfazendo:

- i) $f(x_\lambda) \leq f(x_0)$*
- ii) $d(x_\lambda, x_0) \leq \lambda$*
- iii) $f(x_\lambda) < f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_\lambda), \forall x \neq x_\lambda$*

Demonstração. A relação

$$x \leq y \iff f(x) \leq f(y) - \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, y)$$

é claramente reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Para $u_1 = x_0$, defina

$$S_1 = \{u \in X; u \leq u_1\}.$$

Tome $u_2 \in S_1$ tal que

$$f(u_2) \leq \inf_{x \in S_1} f(x) + \frac{\varepsilon}{2^2}$$

e defina $S_2 = \{u \in X; u \leq u_2\}$.

Admitindo que S_n esteja definido, tomemos $u_{n+1} \in S_n$ tal que

$$f(u_{n+1}) \leq \inf_{x \in S_n} f(x) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

e defina S_{n+1} de modo análogo.

É fácil ver que cada S_n é fechado, que $S_n \supset S_{n+1}$ e que $\text{diam } S_n \leq \frac{\varepsilon}{\lambda 2^{n-1}}$.

Como (X, d) é espaço métrico completo temos que $\cap S_n = \{x_\lambda\}$.

Resta provar que x_λ é o elemento procurado, mas isto é um exercício fácil.

Isto conclui a prova. □

A escolha de $\lambda > 0$ depende do nosso objetivo, se queremos x_λ perto de x_0 devemos escolher $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$. Observamos que iii) diz que x_λ é um mínimo estrito de $f(\cdot) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\cdot, x_\lambda)$.

Mesmo para um espaço de Banach X e f Gateaux diferenciável, a função $f(\cdot) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\cdot, x_\lambda)$ não é Gateaux diferenciável em geral, este é um defeito do Princípio Variacional de Ekeland. O Princípio Variacional de Borwein-Preiss evita este problema. Veja a referência.

Teorema 3.17 (Ponto Fixo de Caristi). *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e T uma aplicação definida sobre X e com valores nas partes não-vazias de X . Suponha que exista $g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funcional semicontínuo inferior satisfazendo:*

$$g(y) \leq g(x) - d(x, y), \quad \forall x \in X, y \in Tx.$$

Então, existe algum ponto fixo x_0 de T , isto é, existe $x_0 \in Tx_0$.

Demonstração. Com $\varepsilon = \lambda = 1$ obtemos do Princípio Variacional de Ekeland um elemento $x_0 \in X$ tal que

$$g(x_0) < g(x) + d(x, x_0), \quad \forall x \neq x_0. \quad (3.2)$$

Provaremos que $x_0 \in Tx_0$. Suponha que todo $y \in Tx_0$ seja diferente de x_0 , então da hipótese temos

$$g(y) \leq g(x_0) - d(x_0, y). \quad (3.3)$$

Com $x = y$, (3.3) contradiz (3.2). □

Mais sobre pontos fixos.

Teorema 3.18 (Ponto Fixo de Schauder). *Seja C subconjunto convexo, limitado e fechado de um espaço de Banach X . Se $T : C \rightarrow X$ é função compacta com $T(C) \subset C$, então existe $x \in C$ tal que $T(x) = x$.*

Veja [8] ou [7].

Teorema 3.19. *Sejam (M, d) um espaço métrico completo, $T : M \rightarrow M$ uma aplicação e ϕ uma função real definida sobre a imagem P da métrica d tal que em $P - \{0\}$ vale:*

1. $\phi(t) < t$
2. $d(Tx, Ty) < \phi(d(x, y))$
3. ϕ é semicontínua superior.

Então, T tem um único ponto fixo.

Uma aplicação $T : M \rightarrow M$, onde M é um espaço métrico completo, é uma contração de Rakotch se existe uma função $\alpha(t) < 1$ decrescente, tal que para todo $x, y \in M$, tem-se

$$d(Tx, Ty) < \alpha(d(x, y)) d(x, y).$$

Estas contrações satisfazem às condições do teorema acima. Para demonstração veja [8].

Teorema 3.20. *Sejam (M, d) um espaço métrico completo, $T : M \rightarrow M$ contínua e $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ semicontínua inferior satisfazendo*

$$d(x, Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx), \quad \forall x \in M.$$

Então, T tem um ponto fixo.

Qualquer contração forte satisfaz a condição do teorema 3.20. Veja [8] para as provas.

3.7 Espaços de Banach

Definição 3.21. *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo K . Dizemos que X é um espaço de Banach se existe uma norma*

$$x \mapsto \|x\|$$

tal que toda sequência de Cauchy de elementos de X é uma sequência convergente. Em outras palavras, X munido da métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

induzida pela norma é espaço métrico completo.

Exceto por menção explícita em contrário, todos os espaços de Banach considerados neste trabalho serão reais e separáveis. Se X é um espaço de Banach representaremos por X^* o dual topológico de X , isto é,

$$X^* = \{x^* : X \rightarrow \mathbb{R}; x^* \text{ é linear e contínua}\}.$$

O valor de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ será indicado por (x^*, x) , $x^*(x)$ ou $\langle x^*, x \rangle$. A aplicação

$$X^* \ni x^* \mapsto \|x^*\| = \sup\{(x^*, x); x \in X \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

torna X^* um espaço de Banach. Além da topologia forte em X , isto é a topologia dada pela norma de X , consideraremos as topologias fraca e fraca-estrela, conforme passamos a descrever.

Definição 3.22. A **topologia fraca** sobre X , denotada por w -topologia, $\sigma(X, X^*)$ ou σ_w , é a menos fina das topologias de X que torna todos os elementos $x^* \in X^*$ contínuos.

Todo aberto da topologia fraca é um aberto da topologia forte. O espaço (X, σ_w) é um espaço de Hausdorff.

Proposição 3.23. *São equivalentes:*

1. $x_\alpha \xrightarrow{\sigma_w} x_0$,
2. $x^*(x_\alpha) \rightarrow x^*(x_0)$, para todo $x^* \in X^*$.

Para uma demonstração, veja [1], [7] ou [5].

Definição 3.24. A **topologia fraca-estrela** de X^* , denotada por w^* , σ_{w^*} ou $\sigma(X^*, X)$, é a menos fina das topologias que torna todos os elementos $\hat{x}$ contínuos, onde

$$X^* \ni x^* \mapsto \hat{x}^*(x) \in \mathbb{R}$$

para cada $x \in X$.

Proposição 3.25. *São equivalentes:*

1. $x_\alpha^* \xrightarrow{\sigma_{w^*}} x_0^*$,
2. $x_\alpha^*(x) \rightarrow x_0^*(x)$, para todo $x \in X$.

Veja [1] ou [7] para outras informações.

Definição 3.26. Dizemos que um espaço de Banach X é **reflexivo** se $J(X) = X$, onde J é a inclusão canônica de X em X^{**} , isto é,

$$X \ni x \mapsto J(x) = \hat{x} \in X^{**}.$$

Definição 3.27. 1. Uma função $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ é **semicontínua inferiormente**, abreviadamente *sci*, no ponto x_0 se,

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Dizemos que f é *sci* se f for *sci* em cada ponto de X . O domínio efetivo de f é definido por $\text{dom}(f) = \{x \in X; f(x) < \infty\}$ e f é dita própria se $\text{dom}(f)$ é não vazio.

2. $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ é **convexa** se para cada $\lambda \in [0, 1]$ vale a desigualdade

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad x, y \in X,$$

sempre que o lado direito fizer sentido.

Adotamos as seguintes convenções: $(\pm r) \cdot \infty = \pm\infty$, se $r > 0$ e $r \pm \infty = \pm\infty$, $\forall r \in \mathbb{R}$.

Lembramos que o epigráfico de uma função $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ é definido por

$$\text{epi}(f) = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R}; r \geq f(x)\}.$$

Proposição 3.28. 1. Para que f seja *sci* é necessário e suficiente que o epigráfico de f seja fechado em $X \times \mathbb{R}$.

2. Para que f seja convexa é necessário e suficiente que seu epigráfico seja convexo.

3. Seja $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ convexa. Se f é *sci*, então f é *sci* na topologia fraca de X . Também f é contínua no interior de $\text{dom}(f)$.

Para as provas e outros detalhes veja [11].

Teorema 3.29. *Sejam X espaço de Banach reflexivo, $C \subset X$ conjunto convexo e fechado e $f : C \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa, própria e sci tal que*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty,$$

caso C seja ilimitado. Então, f tem um mínimo em C , isto é, existe $x_0 \in C$ tal que $f(x_0) = \inf\{f(x); x \in C\}$.

A demonstração pode ser encontrada em [7] ou [1].

Definição 3.30. Seja $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função. Para cada $x_0 \in \text{dom}(f)$, indicamos por $\partial f(x_0)$ o conjunto

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in X^*; (x^*, y - x_0) \leq f(y) - f(x_0), \forall y \in \text{dom}(f)\}.$$

Este conjunto é denominado o **subdiferencial** de f em x_0 .

Uma consequência do teorema de Hahn-Banach é que toda função convexa, própria e semicontínua inferior tem sempre subdiferencial não vazio em todo ponto do seu domínio efetivo.

Definição 3.31. Uma função $f : [0, T] \rightarrow X$ é **absolutamente contínua** se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^N \|f(\beta_n) - f(\alpha_n)\| \leq \varepsilon$$

sempre que

$$\sum_{n=1}^N |\beta_n - \alpha_n| \leq \delta(\varepsilon),$$

onde (α_n, β_n) são intervalos arbitrários de $[0, T]$ e dois a dois disjuntos.

Sabemos que funções absolutamente contínuas com valores em $X = \mathbb{R}$ são diferenciáveis quase sempre em $(0, T)$, mas este resultado não se estende para espaços de Banach quaisquer. Veja exemplo em [12]. De fato, isto caracteriza os espaços X que tenham a propriedade de Radon-Nikodym.

Capítulo 4

Introdução às EDO's

Este capítulo é dedicado ao estudo de problemas abstratos de Cauchy do tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0$$

em um espaço de Banach onde a função f é admitida ser contínua sobre seu domínio de definição. Quase sempre, vamos substituir (sem prejuízo nas provas), o espaço de Banach por um espaço mais simples.

4.1 Introdução

Equações diferenciais ordinárias são importantes em muitos problemas encontrados em vários ramos da Matemática e da Física, e também quando modelamos fenômenos físicos ou biológicos.

Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação em que a variável dependente (a função desconhecida e suas derivadas) são funções de uma variável independente. A ordem de uma EDO é a ordem da mais alta derivada da função desconhecida que aparece na equação.

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, uma função definida e contínua em Ω . Uma equação diferencial ordinária (de primeira

ordem) é uma equação do tipo

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)). \quad (4.1)$$

Dada $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida sobre um aberto I e de classe C^1 neste intervalo, se estiver verificada a condição (4.1), isto é,

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = f(t, \phi(t)), \quad (4.2)$$

dizemos que ϕ é uma solução de (4.1).

Se $n > 1$, (4.1) é de fato um sistema de equações diferenciais ordinárias, pois $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ onde f_i são funções reais e contínuas definidas em Ω :

$$f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Uma das três questões fundamentais no estudo das equações diferenciais ordinárias é a determinação de suas soluções. Existem muitos métodos para determinação explícita de soluções, mas estes métodos não são gerais e determinam as soluções apenas de alguns tipos muito particulares de EDO's.

A maior parte das EDO's não pode ser resolvida explicitamente. Já que a forma explícita da solução de uma EDO pode não existir, outra grande questão que surge é o estudo das propriedades das soluções (sem conhecê-las), é a teoria qualitativa. Esta parte da teoria das EDO's estuda o comportamento das soluções e propriedades geométricas.

Uma terceira questão importante trata da existência e unicidade de soluções das EDO's. Saber da existência de soluções é o primeiro passo no estudo das EDO's, se existe podemos procurar determiná-la ou uma aproximação para ela. O resultado mais importante e básico da teoria das EDO's é o Teorema 4.1 de existência e unicidade.

4.2 O Teorema de Existência

Vamos dar a prova do teorema de existência e unicidade de soluções de EDO's numa situação particular. A prova no caso geral para espaços de Banach não será discutida aqui.

Teorema 4.1 (Existência e Unicidade). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua com $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ também contínua. Dado $(t_0, y_0) \in \Omega$, existe um intervalo aberto $I \ni t_0$ e uma única função diferenciável $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ com $(t, \phi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$, que é solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Demonstração. A função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é solução de (4.3) se e somente se, for solução da equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad \forall t \in I. \quad (4.4)$$

Assim, vamos estudar detalhadamente a equação (4.4). Sejam a e b reais positivos tal que o retângulo

$$R = \{(t, y); |t - t_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$$

esteja inteiramente contido em Ω . Como f é contínua e R é compacto, então f é limitada em R , seja

$$M = \max\{|f(t, y)|; (t, y) \in R\}.$$

Tome $0 < a \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$ e o intervalo $J_a = [t_0 - a, t_0 + a]$.

Seja

$$C = \{g; g : J_a \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua}, g(t_0) = y_0 \text{ e } |g(t) - y_0| \leq b\}.$$

Munimos C da seguinte métrica $d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(t) - g_2(t)|; t \in J_a\}$. Segue que (C, d) é um espaço métrico. Mais ainda, (C, d) é um espaço métrico completo, isto é, toda sequência de Cauchy é convergente.

De (4.4) observamos que toda solução deve ser ponto fixo da aplicação dada por $C \ni g \mapsto \Phi(g)$ onde

$$\Phi(g)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds. \quad (4.5)$$

É fácil ver que $\Phi(g)$ é contínua em J_a e $\Phi(g)(t_0) = y_0$. Além disso,

$$|\Phi(g)(t) - y_0| \leq \left| \int_{t_0}^t f(s, g(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq Ma \leq b$$

e portanto $\Phi(g) \in C$. Logo temos que $\Phi : C \rightarrow C$.

Por outro lado, se g_1 e g_2 pertencem a C temos que

$$|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, g_1(s)) - f(s, g_2(s))| ds.$$

Como f é Lipschitziana na variável y , existe uma constante positiva k tal que

$$|\Phi(g_1)(t) - \Phi(g_2)(t)| \leq \int_{t_0}^t k|g_1(s) - g_2(s)| ds \leq ka d(g_1, g_2).$$

Segue que $d(\Phi(g_1), \Phi(g_2)) \leq ka d(g_1, g_2)$.

Tomando a tal que $ka < 1$ concluímos que Φ é uma contração. Pelo Teorema da contração, Φ tem um único ponto fixo e o teorema fica provado com $I = (t_0 - a, t_0 + a)$. $\square$

Apenas a continuidade da f já garante a existência de solução mas não a unicidade. Para obtermos unicidade é preciso assumir alguma condição adicional.

Exemplo 4.2. Consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = |y|^{1/2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Neste exemplo a função $f(x, y) = |y|^{1/2}$ é contínua em todo o plano $\mathbb{R}^2$ e vemos claramente que $y(x) \equiv 0$ é solução. Mas existe ainda

outra solução,

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{4}x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Isto ocorre porque f_y não é contínua em 0.

Exemplo 4.3. Agora consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} y'(x) = y^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

A função $f(x, y) = y^2$ e f_y são contínuas em todo o plano $\mathbb{R}^2$, assim o teorema diz que existe uma e apenas uma solução em um intervalo $(1 - a, 1 + a)$.

4.3 Um exemplo numérico

Uma vez que o operador dado em (4.5) é uma contração podemos usar a sequência introduzida em (3.1) para gerar aproximações da solução de uma EDO de primeira ordem.

O processo iterativo de Picard consiste em construir uma sequência (x_n) de funções que se aproximam cada vez mais da solução procurada. Como exemplo, consideremos o seguinte PVI

$$\begin{cases} y'(x) = 2x(y + 1), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Primeiramente, vamos escrever a equação integral equivalente

$$y(x) = \int_0^x 2s(y(s) + 1) ds.$$

Façamos $y_0(x) = 0$ e para $n \geq 1$ usamos a fórmula

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x 2s(y_n(s) + 1) ds.$$

Para $y_1(x)$ obtemos

$$y_1(x) = \int_0^x 2s \, ds = x^2.$$

Substituindo na fórmula geral da sequência obtemos $y_2(x)$,

$$y_2(x) = \int_0^x 2s(y_1(s) + 1) \, ds = \int_0^x 2s(s^2 + 1) \, ds = x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Continuando desta forma obtemos uma sequência $y_n(x)$. Vamos determinar mais alguns termos desta sequência:

n	$y_n(x)$
$n = 0$	$y_0(x) = 0$
$n = 1$	$y_1(x) = x^2$
$n = 2$	$y_2(x) = x^2 + \frac{x^4}{2}$
$n = 3$	$y_3(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!}$
$n = 4$	$y_4(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$
$\dots$	$\dots$
$n = k$	$y_k(x) = \sum_{i=1}^k \frac{x^{2i}}{i!}$

Do nosso conhecimento sobre séries de Taylor sabemos que esta sequência converge para $y(x) = \exp(x^2) - 1$.

Agora vamos provar que se duas soluções ϕ e ψ coincidem em algum ponto $t = t_0$ então elas coincidirão em todos os valores de t em que estiveram definidas.

4.4 Outras Propriedades

Teorema 4.4. *Sejam ϕ e φ soluções de (4.3), definidas em intervalos I_1 e I_2 , respectivamente. Suponha $t_0 \in I_1 \cap I_2$ e $\phi(t_0) = \varphi(t_0) = x_0$. Então, ϕ e φ coincidem em todos os valores de $t \in I_1 \cap I_2$.*

Demonstração. Sejam $x = \phi(t)$ e $y = \varphi(t)$ duas soluções satisfazendo $\phi(t_0) = \varphi(t_0) = x_0$.

Seja $J = (r_1, r_2) = I_1 \cap I_2$ o intervalo em que ϕ e φ estão definidas. Seja

$$N = \{t; t \in J \text{ e } \phi(t) = \varphi(t)\}.$$

Note que N é não vazio, pois $t_0 \in N$. Mostraremos que N é aberto e fechado em J e como J é conexo teremos que $J = N$.

Seja (t_n) uma sequência de elementos de N convergente para $t \in J$. Assim, $\phi(t_n) = \varphi(t_n)$. Como ϕ e φ são contínuas temos que $\phi(t) = \varphi(t)$, segue que $t \in N$. Logo, N é fechado em J .

Seja $t_1 \in N$. Então, temos que $\phi(t_1) = \varphi(t_1) = x_1$. Resolvendo o problema de valor inicial com o par (t_1, x_1) , o Teorema de existência e unicidade nos dá a e b tal que $Ka < 1$. Podemos escolher, usando a continuidade de ϕ e φ , a tal que $|\phi(t) - \varphi(t)| \leq b$, com $|t - t_1| < a$.

Como ϕ e φ são soluções temos que

$$\phi(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(s, \phi(s)) ds,$$

$$\varphi(t) = x_1 + \int_{t_1}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Para $|t - t_1| < a$ obtemos

$$|\phi(t) - \varphi(t)| \leq K \int_{t_1}^t |\phi(s) - \varphi(s)| ds \leq bKa.$$

Voltando na desigualdade anterior obtemos $|\phi(t) - \varphi(t)| \leq b(Ka)^2$.

Repetindo o argumento, chegamos que $|\phi(t) - \varphi(t)| \leq b(Ka)^n$, para todo $n \geq 1$. Como $Ka < 1$ obtemos que $\phi(t) = \varphi(t)$ para todo $|t - t_1| < a$. Logo, existe uma vizinhança de t_1 onde $\phi(t)$ e $\varphi(t)$ coincidem, isto é, N é aberto. Como N é não vazio, aberto e fechado em J e J é conexo, segue que $N = J$. $\square$

Para o próximo resultado, que trata da continuidade da solução com os dados iniciais, vamos usar a seguinte notação, $u(t; t_0, y_0)$ denota a solução de (4.3) com $u(t_0) = y_0$.

Teorema 4.5. *Sob as mesmas hipóteses do teorema de existência, a solução $u(t; t_0, y_0)$ é função contínua de y_0 para t_0 e t fixos.*

Demonstração. Consideremos as seguintes aplicações

$$A_0x(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

$$A_1x(t) = y_1 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

cujos pontos fixos são as soluções com condições iniciais y_0 e y_1 num intervalo $[t_0, b]$. Podemos escolher $h < a$ e considerar $J_h = [t_0, t_0 + h]$ intervalo fechado de modo que estas aplicações sejam contrações com mesma constante k . Se $d(y_0, y_1) \leq \varepsilon$ então as contrações são ε -próximas e portanto, pelo Teorema 3.4, a distância entre seus pontos fixos não excede $\frac{\varepsilon}{1-k}$. Segue que

$$\max\{d(u(t; t_0, y_0), u(t; t_1, y_1)), t \in J_h\} \leq \frac{\varepsilon}{1-k}.$$

Assim, duas soluções diferem no máximo por ε em $t = t_0$ e no máximo por $\frac{\varepsilon}{1-k}$ em todo o intervalo J_h .

Movendo o ponto inicial de t_0 para $t_1 = t_0 + h$ podemos estender a solução para o intervalo $[t_0, t_0 + 2h]$ e então repetir o argumento. Encontramos que as duas soluções diferem no máximo por $\frac{\varepsilon}{(1-k)^2}$.

Continuando este argumento, nós finalmente obtemos a seguinte estimativa

$$\max_{t_0 \leq t \leq b} |u(t, t_0, u_0) - u(t, t_0, u_1)| \leq \frac{\varepsilon}{(1-k)^m}, \quad (4.6)$$

onde

$$m = \left\lceil \frac{b - t_0}{h} \right\rceil + 1.$$

Assim, fazendo $|u_0 - u|$ suficientemente pequeno, podemos fazer o lado esquerdo de (4.6) tão pequeno quanto desejado. Isto prova a continuidade de $u(t, t_0, u_0)$. $\square$

O teorema de existência de solução para equações diferenciais ordinárias garante a existência de solução numa vizinhança do ponto inicial t_0 . A pergunta que surge naturalmente é: podemos estender

esta solução para intervalos maiores? O seguinte resultado responde esta pergunta.

Se ϕ é uma solução do pvi definida num intervalo aberto I , dizemos que $\tilde{\phi}$ é uma extensão de ϕ se $\tilde{\phi}$ é solução do pvi, está definida em um intervalo aberto $\tilde{I}$ que contém propriamente I , e em I , $\tilde{\phi}$ e ϕ coincidem. Se uma solução ϕ não admite uma extensão, dizemos que ela é uma solução maximal.

Teorema 4.6. *Sob as hipóteses do teorema de existência, temos que toda solução do problema (4.3) pode ser estendida a um intervalo maximal e este é aberto.*

Demonstração. Seja S o conjunto de todas as soluções ϕ_λ do (4.3) definidas em intervalos abertos $I_\lambda \ni t_0$. Seja $I = \cup I_\lambda$. Defina $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(t) = \phi_\lambda(t)$, $t \in I_\lambda$.

Notemos que I é aberto. E em virtude do Teorema 4.4 ϕ está bem definida e além disso, ϕ é solução do PVI (4.3).

Suponha que $I = (\omega_-, \omega_+)$. Vamos provar que I é maximal, isto é, não existe um intervalo $\tilde{I}$ contendo propriamente I onde o PVI tenha solução $\tilde{\phi}$.

De fato, suponha que isto não seja verdade. Então este conteria uma das extremidades, digamos ω_+ . Assim, o PVI dado por

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(\omega_+) = \tilde{\phi}(\omega_+), \end{cases}$$

teria uma solução ϕ num aberto $(\omega_- - a, \omega_+ + a)$. Segue que

$$\phi = \begin{cases} \phi(t), & t \in (\omega_-, \omega_+) \\ \tilde{\phi}(t), & t \in [\omega_+, \omega_+ + a) \end{cases}$$

seria solução do PVI (4.3) no intervalo $\tilde{I}$ que contém propriamente I . Mas isto é um absurdo. $\square$

Uma equação diferencial linear ordinária de ordem n num intervalo I em geral é escrita como

$$Ly = h(t), \tag{4.7}$$

onde L é um operador diferencial linear de ordem n definido sobre I e h é contínua. Podemos provar que se $y_p(t)$ é qualquer solução de (4.7) e $y_h(t)$ é a solução geral da equação homogênea associada, então

$$y(t) = y_g(t) + y_h(t)$$

é solução geral de (4.7). Em outras palavras, pode-se determinar o conjunto solução de uma EDO linear não homogênea somando a solução da edo homogênea a qualquer solução particular da edo dada.

4.5 Equações Diferenciais de Ordem 2

Considere a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

junto com as condições de fronteira:

$$x(0) = x_1, \quad x(T) = x_2.$$

Provaremos que esse problema tem uma solução. A prova desse resultado é baseada nos seguintes teoremas:

Teorema 4.7 (Schauder-Tychonoff). *Sejam E um espaço de Banach, K um compacto convexo não vazio de E e $u : K \rightarrow K$ uma aplicação contínua. Então, u admite ao menos um ponto fixo.*

Teorema 4.8 (Ascoli). *Sejam E um espaço compacto, F espaço métrico completo e H uma família de funções de $C(E, F)$. Então, H é relativamente compacto se, e somente se, satisfaz:*

i) H é equicontínuo.

ii) Para todo x em E , o conjunto

$$H(x) = \{f(x), f \in H\}$$

é relativamente compacto em F .

Teorema 4.9. *Sejam $I = [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e f uma função contínua e limitada sobre I , então a equação diferencial de segunda ordem:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \quad 0 \leq t \leq T,$$

junto com as condições de fronteira:

$$x(0) = x_1, \quad x(T) = x_2$$

tem uma solução.

Demonstração. Observemos que x é uma solução da equação diferencial dada se, e somente se, é solução da seguinte equação integral:

$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1) \frac{t}{T} - \int_0^T G(t, s) f(s, x(s), x'(s)) ds \equiv u(x)(t) \quad (4.8)$$

onde

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{s(T-t)}{T}, & 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \frac{t(T-s)}{T}, & 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases} \quad (4.9)$$

Esta equação integral sugere definir o operador u . Observamos que as soluções da EDO são pontos fixos da equação integral. Assim, para encontrarmos uma solução da equação integral, basta encontrar um ponto fixo desse operador.

Consideremos E o espaço de Banach de todas as funções continuamente diferenciáveis em $[0, T]$, com a norma

$$\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq T} \{|x(t)| + |x'(t)|\}.$$

Notemos que $u(x)$ é contínua em E . Logo, $u : E \rightarrow E$.

Se fizermos $y = u(x)$, então

$$y(t) = x_1 + (x_2 - x_1) \frac{t}{T} - \int_0^T G(t, s) f(s, x(s), x'(s)) ds.$$

Observe que se $|f| \leq M$ sobre $[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sendo $0 \leq |G| \leq \frac{T}{4}$, obtemos

$$|y(t)| \leq |x_1| + |x_2 - x_1| + \frac{MT^2}{4},$$

isso mostra que y é limitada. Além disso,

$$y'(t) = \frac{x_2 - x_1}{T} + \int_0^t \left(\frac{s}{T}\right) f \, ds + \int_t^T \left(1 - \frac{s}{T}\right) f \, ds.$$

Segue que $|y'(t)| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{T} + 2MT$ (limitadas em cada ponto) e $|y'(t_1) - y'(t_2)| \leq 2M|t_1 - t_2|$ (equicontínuas).

Tomando o envoltório convexo de $u(E)$, o teorema de Ascoli garante que ele é relativamente compacto. Portanto, aplicando o teorema de Schauder-Tychonoff, com $K = \overline{\text{co}}(u(E))$, mostramos que u possui pelo menos um ponto fixo em K . Concluindo, u tem pelo menos um ponto fixo x . x é uma solução da equação integral

$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1) \frac{t}{T} - \int_0^T G(t, s) f(s, x(s), x'(s)) \, ds,$$

portanto, x é uma solução da equação diferencial de segunda ordem. $\square$

Exemplo 4.10. Para ilustrar a aplicação do teorema 4.9 vamos considerar um exemplo simples.

Considere o seguinte problema de valor de contorno dado pela EDO de segunda ordem e as condições de bordo:

$$x''(t) = 4e^{-t}, \quad \text{com} \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x(2) = 0.$$

Passo 1: Aplicação do Teorema 4.9. Aqui $T = 2$, $x_1 = x_2 = 0$, e $f(t, x, x') = 4e^{-t}$. Como $|f(t, x, x')| = 4e^{-t} \leq 4$ em $[0, 2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a função f é contínua e limitada. Pelo Teorema 4.9, a EDO possui solução.

Passo 2: Construção do operador u . A solução deve ser ponto fixo do operador dado por (4.8). Com nossos dados:

$$u(x)(t) = - \int_0^2 G(t, s) \cdot 4e^{-s} \, ds,$$

onde

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{s(2-t)}{2}, & 0 \leq s \leq t, \\ \frac{t(2-s)}{2}, & t \leq s \leq 2. \end{cases}$$

Observação crucial: Como $f(t, x, x') = 4e^{-t}$ não depende de x nem de x' , o operador u é *constante* no sentido funcional, ou seja, $u(x) = u(y)$ para quaisquer funções x, y . Portanto, u possui um *único* ponto fixo, que é a própria imagem $u(x)$ (qual que seja x).

Passo 3: Cálculo explícito do ponto fixo. Decompondo a integral:

$$u(x)(t) = -2(2-t) \int_0^t s e^{-s} ds - 2t \int_t^2 (2-s) e^{-s} ds.$$

Calculando as integrais (por partes):

$$\int_0^t s e^{-s} ds = [-(s+1)e^{-s}]_0^t = 1 - (t+1)e^{-t},$$

$$\int_t^2 (2-s) e^{-s} ds = [(s-1)e^{-s}]_t^2 = e^{-2} - (t-1)e^{-t}.$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} u(x)(t) &= -2(2-t) [1 - (t+1)e^{-t}] - 2t [e^{-2} - (t-1)e^{-t}] \\ &= -2(2-t) + 2(2-t)(t+1)e^{-t} - 2te^{-2} + 2t(t-1)e^{-t} \\ &= -4 + 2t + 2e^{-t} [(2-t)(t+1) + t(t-1)] - 2te^{-2} \\ &= -4 + 2t + 2e^{-t} [2 + 2t - t^2 - t + t^2 - t] - 2te^{-2} \\ &= -4 + 2t + 4e^{-t} - 2te^{-2}. \end{aligned}$$

Portanto, o ponto fixo (e a solução da EDO) é:

$$x(t) = 4e^{-t} + 2(1 - e^{-2})t - 4.$$

Passo 4: Verificação. Derivando:

$$x'(t) = -4e^{-t} + 2(1 - e^{-2}), \quad x''(t) = 4e^{-t}.$$

Condições de fronteira:

$$x(0) = 4+0-4 = 0, \quad x(2) = 4e^{-2}+4(1-e^{-2})-4 = 4e^{-2}+4-4e^{-2}-4 = 0.$$

Exemplo 4.11. Considere a EDO de segunda ordem:

$$x''(t) = -t, \quad \text{com} \quad x(0) = 0 \quad \text{e} \quad x(1) = 0.$$

Passo 1: Aplicação do Teorema 4.9. Aqui $T = 1$, $x_1 = x_2 = 0$, e $f(t, x, x') = -t$. Como $|f(t, x, x')| = |-t| \leq 1$ em $[0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a função f é contínua e limitada. Pelo Teorema 4.9, a EDO possui solução.

Passo 2: Construção do operador u . A solução deve ser ponto fixo do operador dado por (4.8). Com nossos dados:

$$u(x)(t) = - \int_0^1 G(t, s) \cdot s \, ds,$$

onde

$$G(t, s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \leq s \leq t, \\ t(1-s), & t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Passo 3: Cálculo explícito do ponto fixo. Decompondo a integral:

$$u(x)(t) = -(1-t) \int_0^t s^2 \, ds - t \int_t^1 s(1-s) \, ds.$$

Calculando as integrais:

$$\int_0^t s^2 \, ds = \frac{t^3}{3},$$

$$\int_t^1 s(1-s) \, ds = \int_t^1 (s-s^2) \, ds = \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} \right]_t^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} = \frac{1}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}.$$

Substituindo:

$$\begin{aligned}
 u(x)(t) &= -(1-t)\frac{t^3}{3} - t\left(\frac{1}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right) \\
 &= -\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{3} - \frac{t}{6} + \frac{t^3}{2} - \frac{t^4}{3} \\
 &= -\frac{t}{6} + \frac{t^3}{6} \\
 &= \frac{t(t^2 - 1)}{6} \\
 &= -\frac{t(1 - t^2)}{6}.
 \end{aligned}$$

Portanto, o ponto fixo (e a solução da EDO) é:

$$x(t) = \frac{t(1 - t^2)}{6}.$$

Passo 4: Verificação. Derivando:

$$x'(t) = \frac{1 - 3t^2}{6}, \quad x''(t) = \frac{-6t}{6} = -t.$$

Condições de fronteira:

$$x(0) = \frac{0(1 - 0)}{6} = 0, \quad x(1) = \frac{1(1 - 1)}{6} = 0.$$

Apêndice A

Códigos em Python

Neste apêndice apresentamos implementações em Python dos exemplos numéricos discutidos ao longo do texto. Na versão original deste minicurso (2001), os procedimentos foram escritos em Maple. Nesta atualização, optamos por Python com as bibliotecas **NumPy**, **SciPy** e **Matplotlib**, que são ferramentas livres e amplamente utilizadas na comunidade científica.

Para executar os códigos, é necessário ter o Python 3 instalado com as seguintes bibliotecas:

```
pip install numpy scipy matplotlib
```

A.1 Códigos em Python dos exemplos

Notebook com os exemplos numéricos do apêndice. Os códigos usam **NumPy**, **Matplotlib** e, quando necessário, recursos de integração numérica.

Para instalar as dependências, execute a célula abaixo.

```
[ ]: %pip install numpy scipy matplotlib
```

A.1.1 Método do Ponto Fixo (Capítulo 3)

Implementação do método de iterações sucessivas para encontrar o ponto fixo de $g(x) = (\ln(x) + 3)/2$.

```
[ ]: import numpy as np
from typing import Callable, Tuple

def ponto_fixo(
    g: Callable[[float], float],
    x0: float,
    tol: float = 1e-10,
    maxiter: int = 100
) -> Tuple[float, int]:
    """
    Metodo do ponto fixo (iteracoes sucessivas).

    Args:
        g: Funcao iterativa  $x_{n+1} = g(x_n)$ 
        x0: Chute inicial
        tol: Tolerancia para convergencia
        maxiter: Numero maximo de iteracoes

    Returns:
        Tupla (ponto fixo, numero de iteracoes)
    """
    x = x0
    for n in range(1, maxiter + 1):
        x_new = g(x)
        erro = abs(x_new - x)
        print(f"Iteracao {n:>3}: x = {x_new:.12f}, □
↪erro = {erro:.2e}")
        if erro < tol:
            print(f"\nConvergencia em {n} iteracoes!")
            return x_new, n
        x = x_new
    raise RuntimeError(f"Nao convergiu em {maxiter} □
↪iteracoes.")
```

```

# Exemplo da Secao 3.3:  $f(x) = 2x - 3 - \ln(x) = 0$ 
# Reescrito como  $x = g(x) = (\ln(x) + 3) / 2$ 
g = lambda x: (np.log(x) + 3) / 2

print("=" * 60)
print("Ponto fixo de  $g(x) = (\ln(x) + 3) / 2$ ")
print("=" * 60)
raiz, iters = ponto_fixo(g, x0=1.0)
print(f"\nRaiz encontrada: x* = {raiz:.12f}")
print(f"Verificacao:  $f(x*) = \{2*raiz - 3 - np.\$ 
    ↪  $\log(raiz):.2e\}$ ")

```

A.1.2 Processo Iterativo de Picard (Capítulo 4)

Processo iterativo de Picard para a EDO $y' = 2x(y + 1)$, com $y(0) = 0$, comparando as iterações com a solução exata.

```

[ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from typing import Callable

# Compatibilidade entre versões do NumPy
integrar = getattr(np, "trapezoid", None)
if integrar is None:
    integrar = np.trapz

def exibir_expressoes_picard(n_iter: int) -> None:
    """Exibe as expressões simbólicas  $y_0(x)$ , ..., ↪
    ↪  $y_n(x)$ ."""
    print("Expressões das aproximações de Picard:")

    try:
        from IPython.display import Math, display
        ipython_disponivel = True
    except ImportError:

```

```

ipython_disponivel = False

for n in range(n_iter + 1):
    if n == 0:
        expressao_latex = "0"
        expressao_texto = "0"
    else:
        termos_latex = [r"x^2"]
        termos_texto = ["x^2"]
        for i in range(2, n + 1):
            termos_latex.
→ append(rf"\frac{{{x}^{{{2*i}}}}}{{{i}!}}")
            termos_texto.append(rf"x^{2*i}/{i}!")
            expressao_latex = " + ".join(termos_latex)
            expressao_texto = " + ".join(termos_texto)

        if ipython_disponivel:
            display(Math(rf"y_{{{n}}}(x) =_
→ {expressao_latex}"))
        else:
            print(f"y_{n}(x) = {expressao_texto}")

    if ipython_disponivel:
        display(Math(r"y_k(x) =_
→ \displaystyle\sum_{i=1}^k\frac{x^{2i}}{i!}"))
    else:
        print("y_k(x) = sum(i=1 até k) de x^(2i)/i!")

def picard_iteracao(
    f: Callable[[float, float], float],
    x0: float,
    y0: float,
    x_final: float,
    n_iter: int = 5,
    n_pontos: int = 200
) -> None:

```

```

"""Processo iterativo de Picard para uma EDO de
→primeira ordem."""
    # Exibe primeiro as funções aproximadas geradas
→pelo método
    exibir_expressoes_picard(n_iter)

    x = np.linspace(x0, x_final, n_pontos)

    # Aproximação inicial:  $y_0(x) = y_0$ 
    y_atual = np.full_like(x, y0, dtype=float)
    aproximacoes = [y_atual.copy()]

    plt.figure(figsize=(10, 6))
    plt.plot(x, y_atual, "k--", label=f"$y_0(x) = \square$
    →{y0}$", alpha=0.7)

    for n in range(1, n_iter + 1):
        y_novo = np.zeros_like(x)

        for i, xi in enumerate(x):
            #  $y_n(x) = y_0 + \text{integral de } x_0 \text{ a } x \text{ de } f(s,$ 
→ $y_{n-1}(s)) \, ds$ 
            s = np.linspace(x0, xi, 500)
            y_s = np.interp(s, x, y_atual)
            integrando = f(s, y_s)
            y_novo[i] = y0 + integrar(integrando, s)

        aproximacoes.append(y_novo.copy())
        plt.plot(x, y_novo, "-", linewidth=1.5,
        →label=f"$y_{\{n\}}(x)$")
        y_atual = y_novo.copy()

    # Solução exata:  $y(x) = \exp(x^2) - 1$ 
    y_exata = np.exp(x**2) - 1
    plt.plot(x, y_exata, "r-", linewidth=2.5,
            label=r"Solução exata  $e^{x^2} - 1$ ")

```

```

plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$y(x)$")
plt.title("Processo Iterativo de Picard:  $y' = 2x(y+1)$ ,  $y(0)=0$ ")
plt.legend(loc="upper left")
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.savefig("picard_iteracoes.png", dpi=150)
plt.show()

# EDO:  $y'(x) = 2x(y + 1)$ ,  $y(0) = 0$ 
f = lambda x, y: 2 * x * (y + 1)

picard_iteracao(f, x0=0.0, y0=0.0, x_final=1.0,
    n_iter=5)

```

A.1.3 EDO de Segunda Ordem via Ponto Fixo (Capítulo 4)

Resolução de $x''(t) = 4e^{-t}$ com condições de contorno $x(0) = x(2) = 0$ usando o operador integral baseado na função de Green.

```

[ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from typing import Callable

def funcao_green(t: float, s: float, T: float) -> float:
    """
    Funcao de Green para o problema  $x'' = f(t)$ ,  $x(0) = x(T) = 0$ .

     $G(t,s) = s(T-t)/T$  se  $0 \leq s \leq t$ 
     $G(t,s) = t(T-s)/T$  se  $t \leq s \leq T$ 
    """

```

```

    if s <= t:
        return s * (T - t) / T
    else:
        return t * (T - s) / T

def operador_integral(
    f: Callable[[float], float],
    T: float,
    x1: float,
    x2: float,
    t: np.ndarray,
    u: np.ndarray,
    n_quad: int = 500
) -> np.ndarray:
    """
        Aplica o operador integral  $u(x)(t) = x1 + \int_{x1}^{x2} G(t,s) * f(s, x(s), x'(s)) ds$ 
        Para  $f$  que nao depende de  $x$  nem de  $x'$ , o operador é constante.
    """
    s = np.linspace(0, T, n_quad)
    u_novo = np.zeros_like(t)

    for i, ti in enumerate(t):
        G_vals = np.array([funcao_green(ti, sj, T) for sj in s])
        #  $f(s, x(s), x'(s))$  - neste exemplo  $f = 4 * \exp(-s)$ 
        f_vals = f(s)
        u_novo[i] = x1 + (x2 - x1) * ti / T - np.trapz(G_vals * f_vals, s)

    return u_novo

# Dados do problema

```

```

T = 2.0
x1 = 0.0
x2 = 0.0
f = lambda s: 4 * np.exp(-s)

# Discretizacao
t = np.linspace(0, T, 200)

# Aplicacao do operador (como f nao depende de x, uma
    ↪ aplicacao basta)
u_inicial = np.zeros_like(t)
u_ponto_fixo = operador_integral(f, T, x1, x2, t,
    ↪ u_inicial)

# Solucao analitica exata
x_exata = 4 * np.exp(-t) + 2 * (1 - np.exp(-2)) * t - 4

# Grafico
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(14, 5))

ax1.plot(t, u_ponto_fixo, 'b-', linewidth=2,
    ↪ label='Ponto fixo do operador $u$')
ax1.plot(t, x_exata, 'r--', linewidth=2,
    ↪ label='Solucao analitica')
ax1.plot(t, np.zeros_like(t), 'k-', linewidth=0.5)
ax1.set_xlabel('$t$')
ax1.set_ylabel('$x(t)$')
ax1.set_title('EDO: $x\''(t) = 4e^{-t}$,
    ↪ $x(0)=x(2)=0$')
ax1.legend()
ax1.grid(True, alpha=0.3)

# Erro entre solucao numerica e analitica
erro = np.abs(u_ponto_fixo - x_exata)
ax2.semilogy(t, erro + 1e-16, 'g-', linewidth=2)
ax2.set_xlabel('$t$')
ax2.set_ylabel('Erro $|x_{num}(t) - x_{exata}(t)|$')

```

```

ax2.set_title('Erro da solucao numerica')
ax2.grid(True, alpha=0.3)

plt.tight_layout()
plt.savefig('edo_segunda_ordem.png', dpi=150)
plt.show()

```

A.1.4 EDO de Segunda Ordem: Exemplo Adicional

Resolução de $x''(t) = -t$ com $x(0) = x(1) = 0$, cuja solução exata é $x(t) = t(1 - t^2)/6$.

```

[ ]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def funcao_green(t: float, s: float, T: float) -> float:
    """Funcao de Green para  $x'' = f(t)$ ,  $x(0) = x(T) = 0$ ."""
    if s <= t:
        return s * (T - t) / T
    else:
        return t * (T - s) / T

# Dados do problema
T = 1.0
f = lambda s: -s

# Discretizacao
t = np.linspace(0, T, 200)
s = np.linspace(0, T, 500)

# Calculo do ponto fixo via operador integral
x_numerico = np.zeros_like(t)
for i, ti in enumerate(t):
    G_vals = np.array([funcao_green(ti, sj, T) for sj in s])

```

```

f_vals = f(s)
x_numerico[i] = -np.trapz(G_vals * f_vals, s)

# Solucao analitica
x_exata = t * (1 - t**2) / 6

# Grafico
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(t, x_numerico, 'b-', linewidth=2,
         label='Ponto fixo do operador $u$')
plt.plot(t, x_exata, 'r--', linewidth=2,
         label=r'Solucao analitica $x(t) = \frac{t(1-t^2)}{6}$')
plt.plot([0, 1], [0, 0], 'k-', linewidth=0.5)
plt.xlabel('$t$')
plt.ylabel('$x(t)$')
plt.title('EDO: $x''(t) = -t$, $x(0)=x(1)=0$')
plt.legend()
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.tight_layout()
plt.savefig('edo_exemplo_adicional.png', dpi=150)
plt.show()

```

A.2 Observações sobre os Códigos

1. Todos os códigos são autocontidos e podem ser executados diretamente em qualquer ambiente Python 3.
2. As figuras geradas são salvas automaticamente como arquivos PNG com resolução adequada para impressão.
3. A função `np.trapz` foi usada para integração numérica. Em versões mais recentes do NumPy (≥ 2.0), esta função foi renomeada para `np.trapezoid`. Se ocorrer um erro, substitua `np.trapz` por `np.trapezoid` ou use `scipy.integrate.trapezoid`.
4. Os códigos utilizam *type hints* (tipagem estática) seguindo as

boas práticas modernas de desenvolvimento Python.

5. Para os exemplos de EDO de segunda ordem, o operador integral é aplicado apenas uma vez porque $f(t, x, x')$ não depende de x nem de x' . Para problemas não-lineares gerais, seria necessário iterar o operador até convergência.

Referências Bibliográficas

- [1] B. Beauzamy. *Introduction to Banach spaces and their Geometry*. North-Holland Mathematics Studies (1982).
- [2] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications*. Masson (1987).
- [3] K. Deimling. *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*. Lecture Note in Mathematics 596. Springer-Verlag (1977).
- [4] J. Diestel and J. J. Uhl Jr. *Vector Measures*. Mathematics Survey no. 15. Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island (1977).
- [5] I. Ekeland and J. P. Aubin. *Applied Nonlinear Analysis*. John Wiley and Sons (1984).
- [6] D. G. Figueiredo. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Coleção Matemática Universitária. SBM (1989).
- [7] C. S. Hönl. *Aplicações da Topologia à Análise*. Projeto Euclides, IMPA (1976).
- [8] V. I. Istratescu. *Fixed Points Theory, An Introduction*. D. Reidel Publishing Company (1988).
- [9] K. Kuratowski. *Topology*, vol. III. Academic Press, New York (1966).
- [10] V. Lakshmikantham and S. Leela. *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*. International Series in Nonlinear Mathematics, Pergamon Press (1981).

- [11] R. R. Phelps. *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*. LNM 1364. Springer-Verlag (1988).
- [12] V. Barbu. *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*. Nordoff Inst. Publishing (1976).