

Integração por Substituição Trigonométrica

Prof. Doherty Andrade

Resumo

Este material apresenta a técnica de integração por substituição trigonométrica, utilizada para resolver integrais que envolvem expressões quadráticas da forma $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$ e $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$. São apresentados exemplos detalhados, uma aplicação prática, tabelas de consulta, dicas para evitar erros comuns e uma comparação com outros métodos de integração para facilitar o aprendizado.

I. Introdução

Integrar é uma técnica, assim como derivar. Existem muitas técnicas de integração: integração por substituição, integração por partes, integração por frações parciais, integração por substituição trigonométrica. Todas bem simples, é só pegar o jeito.

Continuando, veremos a **integração por substituição trigonométrica**. Usada quando o integrando contém uma das seguintes formas:

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2}, \quad \sqrt{a^2 + b^2x^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{b^2x^2 - a^2}$$

Vejamos alguns exemplos:

- (a) $\int \sqrt{a^2 - b^2x^2} dx$ faça a substituição $x = \frac{a}{b} \sin u$
- (b) $\int \sqrt{a^2 + b^2x^2} dx$ faça a substituição $x = \frac{a}{b} \tan u$
- (c) $\int \sqrt{b^2x^2 - a^2} dx$ faça a substituição $x = \frac{a}{b} \sec u$

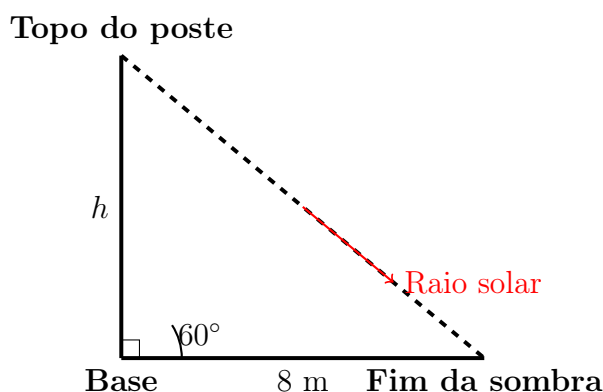
Fazendo essas substituições obteremos integrais na variável u . A expressão da integral na variável original x pode ser obtida por meio do auxílio de um triângulo retângulo.

II. Aplicação Clássica: Altura de um Poste

Antes de mergulharmos na integração, vamos revisar uma aplicação clássica da trigonometria que ilustra o poder das razões trigonométricas.

Problema: Um poste vertical projeta uma sombra de 8 metros sobre o solo horizontal. O ângulo de elevação do Sol é de 60° . Qual é a altura do poste?

Passo 1: Identificar as informações e desenhar o problema.



Passo 2: Identificar a razão trigonométrica adequada.

Temos: - Lado **oposto** ao ângulo de 60° : altura do poste h (desconhecida) - Lado **adjacente** ao ângulo de 60° : sombra = 8 m (conhecida)

A razão que relaciona oposto e adjacente é a **tangente**:

$$\tan(60^\circ) = \frac{\text{oposto}}{\text{adjacente}} = \frac{h}{8}$$

Passo 3: Resolver para h .

Sabemos que $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$, portanto:

$$\sqrt{3} = \frac{h}{8} \implies h = 8\sqrt{3}$$

Passo 4: Calcular o valor numérico.

Usando $\sqrt{3} \approx 1,732$:

$$h \approx 8 \times 1,732 \approx 13,86 \text{ m}$$

Resposta: A altura do poste é $h = 8\sqrt{3} \approx 13,86$ metros.

Observação: Este problema ilustra como as funções trigonométricas permitem resolver problemas práticos de medição indireta. Na integração por substituição trigonométrica, usaremos essas mesmas funções de forma inversa para resolver integrais complexas.

III. Exemplo básico de integração

Calcule a integral $\int \sqrt{1-x^2} dx$ fazendo a substituição $x = \sin u$.

Sabemos que $dx = \cos u du$. Substituindo na integral:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du \\ &= \int \cos^2 u du \\ &= \int \frac{1 + \cos(2u)}{2} du \\ &= \frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} \end{aligned}$$

Ou seja, utilizando a identidade de arco duplo $\sin(2u) = 2 \sin u \cos u$:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{u}{2} + \frac{2 \sin u \cos u}{4} = \frac{u}{2} + \frac{\sin u \cos u}{2}$$

Voltando à variável original:

Faça um triângulo indicando a substituição trigonométrica realizada:

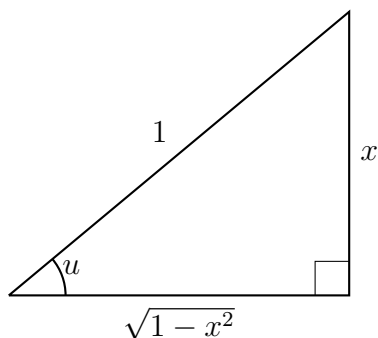


Figura: Triângulo para a substituição $x = \sin u$

Do triângulo vemos que $\cos u = \sqrt{1-x^2}$ e, como $x = \sin u$, temos $u = \arcsin x$. Assim temos:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

IV. Exemplos adicionais

Exemplo 1: Caso da tangente

Calcule $\int \frac{dx}{4+x^2}$ fazendo a substituição $x = 2 \tan u$.

Passo 1: Derivando a substituição:

$$dx = 2 \sec^2 u du$$

Passo 2: Substituindo na integral:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4+x^2} &= \int \frac{2 \sec^2 u du}{4 + (2 \tan u)^2} \\ &= \int \frac{2 \sec^2 u du}{4 + 4 \tan^2 u} \\ &= \int \frac{2 \sec^2 u du}{4(1 + \tan^2 u)} \end{aligned}$$

Passo 3: Usando a identidade $1 + \tan^2 u = \sec^2 u$:

$$\int \frac{2 \sec^2 u du}{4 \sec^2 u} = \int \frac{1}{2} du = \frac{u}{2} + C$$

Passo 4: Voltando à variável original. Como $x = 2 \tan u$, temos $u = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$. Portanto:

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Exemplo 2: Caso da secante

Calcule $\int \sqrt{x^2 - 4} dx$ fazendo a substituição $x = 2 \sec u$.

Passo 1: Derivando a substituição:

$$dx = 2 \sec u \tan u du$$

Passo 2: Simplificando a raiz:

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{4 \sec^2 u - 4} = \sqrt{4(\sec^2 u - 1)} = 2\sqrt{\tan^2 u} = 2 \tan u$$

Passo 3: Substituindo na integral:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - 4} dx &= \int (2 \tan u)(2 \sec u \tan u) du \\ &= 4 \int \sec u \tan^2 u du \\ &= 4 \int \sec u (\sec^2 u - 1) du \\ &= 4 \int (\sec^3 u - \sec u) du \end{aligned}$$

Passo 4: Usando as integrais conhecidas $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u|$ e $\int \sec^3 u du = \frac{1}{2}(\sec u \tan u + \ln |\sec u + \tan u|)$:

$$\begin{aligned} 4 \int (\sec^3 u - \sec u) du &= 4 \left[\frac{1}{2}(\sec u \tan u + \ln |\sec u + \tan u|) - \ln |\sec u + \tan u| \right] + C \\ &= 2 \sec u \tan u - 2 \ln |\sec u + \tan u| + C \end{aligned}$$

Passo 5: Voltando à variável original pelo triângulo:

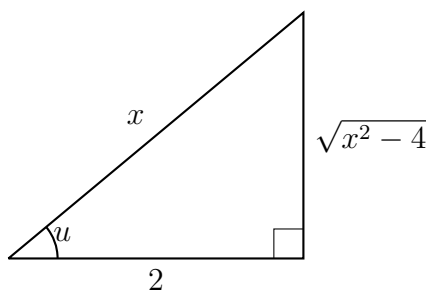


Figura: Triângulo para $x = 2 \sec u$

Do triângulo: $\sec u = \frac{x}{2}$ e $\tan u = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2}$. Substituindo:

$$\int \sqrt{x^2 - 4} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 4} - 2 \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right| + C$$

Exemplo 3: Caso do seno com potência

Calcule $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ fazendo a substituição $x = \sin u$.

Passo 1: Derivando a substituição:

$$dx = \cos u \, du$$

Passo 2: Substituindo na integral:

$$\begin{aligned}\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sin^2 u \cdot \cos u \cdot \cos u \, du \\ &= \int \sin^2 u \cos^2 u \, du\end{aligned}$$

Passo 3: Usando a identidade $\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin(2u)$:

$$\int \sin^2 u \cos^2 u \, du = \int \frac{\sin^2(2u)}{4} \, du = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos(4u)}{2} \, du$$

Passo 4: Integrando:

$$\frac{1}{8} \int (1 - \cos(4u)) \, du = \frac{1}{8} \left(u - \frac{\sin(4u)}{4} \right) + C$$

Passo 5: Simplificando $\sin(4u) = 2 \sin(2u) \cos(2u) = 4 \sin u \cos u (1 - 2 \sin^2 u)$:

$$\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{u}{8} - \frac{\sin u \cos u (1 - 2 \sin^2 u)}{8} + C$$

Passo 6: Voltando à variável original. Do triângulo anterior: $\sin u = x$, $\cos u = \sqrt{1-x^2}$ e $u = \arcsin x$:

$$\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{8} \arcsin x - \frac{x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{4} + C$$

Exemplo 4: Caso com $a \neq 1$

Calcule $\int \sqrt{9-4x^2} dx$.

Solução: Escrevemos na forma $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$ com $a = 3$ e $b = 2$.

Fazemos $x = \frac{3}{2} \sin u \Rightarrow dx = \frac{3}{2} \cos u \, du$.

Substituindo:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9-4x^2} dx &= \int \sqrt{9-4\left(\frac{9}{4} \sin^2 u\right)} \cdot \frac{3}{2} \cos u \, du \\ &= \int \sqrt{9-9 \sin^2 u} \cdot \frac{3}{2} \cos u \, du \\ &= \int 3 \cos u \cdot \frac{3}{2} \cos u \, du \\ &= \frac{9}{2} \int \cos^2 u \, du \\ &= \frac{9}{2} \left(\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} \right) + C\end{aligned}$$

Voltando à variável original:

$$\int \sqrt{9 - 4x^2} dx = \frac{9}{4} \arcsen\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{2} \sqrt{9 - 4x^2} + C$$

Exemplo 5: Integral com denominador

Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}}$.

Solução: Escrevemos na forma $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$ com $a = 3$ e $b = 1$.

Fazemos $x = 3 \tan u \Rightarrow dx = 3 \sec^2 u du$.

Substituindo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} &= \int \frac{3 \sec^2 u du}{\sqrt{9 + 9 \tan^2 u}} = \int \frac{3 \sec^2 u du}{3 \sec u} = \int \sec u du \\ &= \ln |\sec u + \tan u| + C \end{aligned}$$

Voltando à variável original: com $\tan u = \frac{x}{3}$ e $\sec u = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{3}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 + x^2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{9 + x^2}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{9 + x^2} + x}{3} \right| + C$$

Exemplo 6: Aplicação em Física - Comprimento de Arco

O comprimento de um arco de curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Exemplo: Calcule o comprimento da curva $y = \sinh^{-1}(x)$ de $x = 0$ a $x = 1$.

Temos $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$, então:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{1 + x^2}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{2 + x^2}{1 + x^2}} dx$$

Esta integral pode ser resolvida com substituição trigonométrica...

V. Tabela de Integrais Notáveis

Durante o processo de integração por substituição trigonométrica, frequentemente encontramos integrais que não são imediatas. A tabela abaixo contém as integrais mais comuns que aparecem nesses cálculos. Tenha esta tabela sempre à mão!

Integral	Resultado
$\int \sin u \, du$	$-\cos u + C$
$\int \cos u \, du$	$\sin u + C$
$\int \tan u \, du$	$-\ln \cos u + C = \ln \sec u + C$
$\int \cot u \, du$	$\ln \sin u + C$
$\int \sec u \, du$	$\ln \sec u + \tan u + C$
$\int \csc u \, du$	$-\ln \csc u + \cot u + C = \ln \csc u - \cot u + C$
$\int \sec^2 u \, du$	$\tan u + C$
$\int \csc^2 u \, du$	$-\cot u + C$
$\int \sec u \tan u \, du$	$\sec u + C$
$\int \csc u \cot u \, du$	$-\csc u + C$
$\int \tan^2 u \, du$	$\tan u - u + C$
$\int \cot^2 u \, du$	$-\cot u - u + C$
$\int \sec^3 u \, du$	$\frac{1}{2}(\sec u \tan u + \ln \sec u + \tan u) + C$
$\int \sin^2 u \, du$	$\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4} + C$
$\int \cos^2 u \, du$	$\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} + C$

Dica: As integrais de $\sec^3 u$ e $\csc^3 u$ são obtidas por integração por partes e aparecem frequentemente em problemas de substituição trigonométrica. Memorize-as!

VI. Algumas observações (relembrando as funções trigonométricas)

1. Definições

Função	Definição	Função	Definição
$\tan x$	$\frac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x$	$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$
$\sec x$	$\frac{1}{\cos x}$	$\csc x$	$\frac{1}{\sin x}$

2. Identidades trigonométricas

Identidade	Expressão
Pitagórica fundamental	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
Tangente e secante	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
Cotangente e cossecante	$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

3. Soma de arcos

Função	Fórmula
Seno	$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
Cosseno	$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
Tangente	$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

4. Arco duplo

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$$

5. Arco metade

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

6. Derivadas das funções trigonométricas

Função	Derivada	Função	Derivada
$\frac{d}{dx}(\sin x)$	$\cos x$	$\frac{d}{dx}(\cos x)$	$-\sin x$
$\frac{d}{dx}(\tan x)$	$\sec^2 x$	$\frac{d}{dx}(\cot x)$	$-\csc^2 x$
$\frac{d}{dx}(\sec x)$	$\sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}(\csc x)$	$-\csc x \cot x$

7. Tabela de conversão

No cálculo de integrais por substituição trigonométrica, após integrar na variável u , precisamos voltar à variável original x . Para isso, usamos um triângulo retângulo. Porém, existe uma maneira mais rápida: a **tabela de conversão**.

A tabela abaixo responde à seguinte pergunta:

Dadas duas funções trigonométricas ϕ e ψ , qual é o valor de $\phi(\arcsin(\psi(x)))$?

Como usar a tabela:

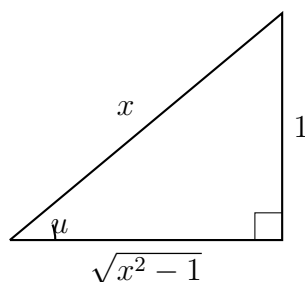
1. **Localize a linha** da função que você quer calcular (ϕ).
2. **Localize a coluna** da função inversa que você tem (ψ).
3. **Leia o valor** na interseção.

Exemplo: Calcular $\cot(\operatorname{arccsc}(x))$.

1. $\phi = \cot$ (função que queremos) $\rightarrow$ linha da **Cotangente**
2. $\psi = \csc$ (função inversa que temos) $\rightarrow$ coluna da **Cossecante**
3. Na interseção: $\cot(\operatorname{arccsc}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$

Verificação com triângulo retângulo:

Se $\csc u = x$, então $\sin u = \frac{1}{x}$. No triângulo:



Triângulo para $\csc u = x$

Do triângulo: $\cot u = \frac{\text{adjacente}}{\text{oposto}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{1} = \sqrt{x^2 - 1}$. Portanto, $\cot(\operatorname{arccsc}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$. ✓

Tabela de Conversão Completa:

$\phi \setminus \psi$	Seno	Cosseno	Tangente	Cossecante	Secante	Cotangente
Seno	x	$\sqrt{1 - x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
Cosseno	$\sqrt{1 - x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
Tangente	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2 - 1}$	$\frac{1}{x}$
Cossecante	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1 + x^2}$
Secante	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1 + x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
Cotangente	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2 - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x

Exemplos práticos de uso da tabela:

- $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ (linha Seno, coluna Cosseno)
- $\tan(\operatorname{arcsec}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ (linha Tangente, coluna Secante)
- $\sec(\arctan(x)) = \sqrt{1 + x^2}$ (linha Secante, coluna Tangente)

Observação: A tabela é especialmente útil quando você precisa fazer várias substituições trigonométricas em uma mesma integral, pois evita ter que desenhar um triângulo a cada passo.

8. Resumo: Casos de Substituição

Forma no integrando	Substituição	Identidade usada
$\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$	$x = \frac{a}{b} \sin u$	$1 - \sin^2 u = \cos^2 u$
$\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$	$x = \frac{a}{b} \tan u$	$1 + \tan^2 u = \sec^2 u$
$\sqrt{b^2 x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{b} \sec u$	$\sec^2 u - 1 = \tan^2 u$

VII. Exercícios

Calcule as integrais e utilize a tabela (ou triângulo retângulo) para exprimir a integral na variável x .

(a) $\int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx$ substituição $x = \frac{a}{b} \sin u$

(b) $\int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx$ substituição $x = \frac{a}{b} \tan u$

(c) $\int \sqrt{b^2 x^2 - a^2} dx$ substituição $x = \frac{a}{b} \sec u$

(d) $\int \frac{dx}{4 + x^2}$ substituição $x = 2 \tan u$

(e) $\int \sqrt{x^2 - 4} dx$ substituição $x = 2 \sec u$

VIII. Dicas e Erros Comuns

- **Erro:** Esquecer de voltar à variável original após integrar.

Dica: Sempre desenhe o triângulo retângulo ou use a tabela de conversão antes de finalizar.

- **Erro:** Confundir os casos de substituição.

Dica: Memorize:

$$\begin{aligned} - \sqrt{a^2 - b^2 x^2} &\rightarrow x = \frac{a}{b} \sin u \\ - \sqrt{a^2 + b^2 x^2} &\rightarrow x = \frac{a}{b} \tan u \\ - \sqrt{b^2 x^2 - a^2} &\rightarrow x = \frac{a}{b} \sec u \end{aligned}$$

- **Erro:** Não simplificar a raiz corretamente.

Dica: Lembre-se das identidades:

$$1 - \sin^2 u = \cos^2 u, \quad 1 + \tan^2 u = \sec^2 u, \quad \sec^2 u - 1 = \tan^2 u$$

- **Erro:** Esquecer a constante de integração C .

Dica: Todas as integrais indefinidas devem terminar com $+C$.

- **Erro:** Escolher a substituição errada para o tipo de raiz.

Dica: Consulte a tabela de substituições na Seção VI.8.

IX. Quando usar substituição trigonométrica vs. outros métodos

Forma do integrando	Método recomendado
$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$ com x no radical	Substituição trigonométrica
$\sqrt{a^2 + b^2x^2}$	Substituição trigonométrica
$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$	Substituição trigonométrica
$\frac{P(x)}{Q(x)}$ (frações)	Frações parciais
$f(x)g'(x)$	Integração por partes
$f(g(x))g'(x)$	Substituição simples ($u = g(x)$)
$e^{ax} \sin(bx)$ ou $e^{ax} \cos(bx)$	Integração por partes (duas vezes)
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	Substituição trigonométrica ou fórmula direta

Observação: Em alguns casos, mais de um método pode ser aplicado. A escolha depende da familiaridade e da complexidade da integral.

X. Glossário

Substituição trigonométrica Técnica de integração onde substituímos a variável x por uma função trigonométrica para simplificar expressões com raízes quadráticas.

Identidade pitagórica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, base para as substituições trigonométricas.

Triângulo retângulo Ferramenta geométrica usada para voltar da variável u para a variável original x .

Arco seno, arco tangente, etc. Funções trigonométricas inversas, denotadas por $\arcsin x$, $\arctan x$, $\operatorname{arcsec} x$, etc.

Integral indefinida Integral que não possui limites de integração, resultando em uma família de funções diferenciadas por uma constante C .

Integração por partes Técnica baseada na regra do produto para derivadas, usada quando o integrando é um produto de funções.

Frações parciais Técnica usada para integrar funções racionais (quociente de polinômios).

XII. Referências Bibliográficas

Referências

- [1] STEWART, James. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 1.
- [2] ANDRADE, D. *Notas de Aula de Cálculo Diferencial e Integral*. Tópico: Integração por Substituição Trigonométrica. Universidade Estadual de Maringá, 2010.
- [3] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. *Cálculo*. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. v. 1.
- [4] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.
- [5] DAWKINS, Paul. *Calculus I*. Lamar University. Disponível em: <https://tutorial.math.lamar.edu/>. Acesso em: 20 jun. 2026.