

O método de Newton-Raphson

Prof. Doherty Andrade

www.metodosnumericos.com.br

1 Introdução

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais eficientes para a solução numérica de $f(x) = 0$. Como veremos, esse método possui ordem de convergência 2.

Suponha que $f(x)$ tenha uma raiz simples no intervalo $[a, b]$ e que f seja de classe C^2 em $[a, b]$. Dado $x_n \in (a, b)$, usando o desenvolvimento de Taylor, podemos escrever

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2!}f''(\xi_n)(x - x_n)^2,$$

onde ξ_n está entre x e x_n . Se α é a solução, então

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2!}f''(\xi_n)(\alpha - x_n)^2,$$

onde ξ_n está entre α e x_n .

Supondo que x_n esteja suficientemente próximo de α , podemos desprezar o resto $\frac{1}{2!}f''(\xi_n)(\alpha - x_n)^2$, donde obtemos uma aproximação para α

$$\alpha \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

desde que $f'(x_n) \neq 0$.

Obtemos assim o método de Newton-Raphson que nos dá x_{n+1} como uma aproximação para a raiz α por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0. \quad (1)$$

Note que o método de Newton-Raphson é um método iterativo de passo 1 e que para ser iniciado necessitamos da aproximação inicial x_0 .

A função

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2)$$

é chamada de função de iteração para o método de Newton-Raphson. Como $\varphi'(\alpha) = 0$ e $\varphi'(x)$ é contínua, segue que existe uma vizinhança de α em que $|\varphi'(x)| \leq k < 1$, onde $0 \leq k < 1$. O que mostra que $\varphi(x)$ é uma contração em alguma vizinhança de α . Isto explica porque o método de Newton-Raphson funciona.

2 Método prático

Uma maneira prática para usar o método de Newton-Raphson é utilizar uma tabela como mostrado abaixo, tabela 1.

Nesse exemplo, determinamos uma aproximação para a solução da equação $4 \cos(x) - e^x = 0$ localizada em $[0, 1]$, tomamos $x_0 = 0.9$ como aproximação inicial.

Tabela 1: Modelo de tabela para Newton-Raphson

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$ x_{k+1} - x_k $
0	0.9	0.02683676	-5.59291075	-
1	0.904798353	-0.00005693	-5.61663586	0.004798353
2	0.904788217	0	-5.61658576	0.000010136
3	0.9047882179	-	-	-

3 Interpretação Gráfica

A reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_k, f(x_k))$ cruza o eixo OX no ponto x_{k+1} dado por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Isso justifica o outro nome do método de Newton-Raphson: o método das tangentes.

Referências

- [1] S. D. CONTE. *Elementary Numerical Analysis*. MacGraw-Hill, 1965.
- [2] K. ATKINSON. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Willey& Sons, New York, 1983.